Chapitre 4 : séries de Fourier

1 Définitions

1.1 Fonctions périodiques

Une fonction $f(x)$ est dité périodique de période P si $\forall x$, $f(x+P) = f(x)$ (où P est une constante réelle positive). La plus petite des valeurs de $P > 0$ est appelée "moindre période" ou "période" de $f(x)$.

Exemples :

- $\sin x$ a pour période $2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$ et pour moindre période 2π ;
- $\sin nx$ a pour moindre période $\frac{2\pi}{n}$;
- $\tan x$ a pour moindre période π.

1.2 Séries de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle $]-L, L[$ et déterminée à l'extérieur de l'intervalle par $f(x+2L) = f(x)$, c'est-à-dire supposons $f(x)$ de période $2L$.

Definition (Série de Fourier) :
La série de Fourier correspondant à $f(x)$ est définie par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1}$$

où les coefficients a_n et b_n $\forall n \in \mathbb{N}$ sont appelés coefficients de Fourier et valent :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x \tag{3}$$

Remarquons que les fonctions trigonométriques $\cos \frac{n\pi x}{L}$ et $\sin \frac{n\pi x}{L}$ sont de période $\frac{2L}{n}$ c'est-à-dire de fréquences égales à $\frac{n}{2L}$ c'est-à-dire des multiples entiers de fois la fréquence de la fonction $f(x)$ qui vaut $\frac{1}{2L}$.

Théorème 1.1 *(Translation de l'intervalle d'intégration) :*
Comme $f(x)$ a une période de $2L$, les coeffients de Foutier peuvent aussi être déterminés par les formules :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x \tag{5}$$

$\forall c \in \mathbb{R}$.

Preuve
Tout d'abord, $g(x) = f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ est $2L-$périodique puisque :

$$g(x+2L) = f(x+2L)\cos\frac{n\pi(x+2L)}{L} = f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) = f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} = g(x)$$

Ensuite, si $g(x)$ est $2L-$périodique, on a :

$$\int_{-L}^{L} g(x)\mathrm{d}x = \int_{c}^{c+2L} g(x)\mathrm{d}x \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

En effet $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\mathrm{d}x &= \int_{\alpha+2L}^{\beta+2L} g(y-2L)\mathrm{d}y \quad \text{où l'on a posé : } x = y - 2L \\
&= \int_{\alpha+2L}^{\beta+2L} g(y)\mathrm{d}y \quad \text{comme } g(y) \text{ est } 2L \text{ périodique.}
\end{aligned}$$

En particulier, si $\alpha = -L$ et $\beta = c$, on a :

$$\int_{-L}^{c} g(x)\mathrm{d}x = \int_{L}^{c+2L} g(y)\mathrm{d}y \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_{c}^{c+2L} g(x)\mathrm{d}x &= \int_{c}^{-L} g(x)\mathrm{d}x + \int_{-L}^{L} g(x)\mathrm{d}x + \int_{L}^{c+2L} g(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-L}^{c} g(x)\mathrm{d}x + \int_{-L}^{L} g(x)\mathrm{d}x + \int_{-L}^{c} g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-L}^{L} g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

Notons que :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x \tag{6}$$

est la moyenne de $f(x)$ sur une période.

Théorème 1.2 *(Cas particulier) :*

Si $L = \pi$, la série devient :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{7}$$

et les coefficients de Fourier a_n et b_n $\forall n \in \mathbb{N}$ deviennent :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \tag{9}$$

Attention

A ce stade, la série correspond à $f(x)$. On ne sait pas si elle converge, et même si elle converge, si elle converge vers $f(x)$.

1.3 Conditions de Dirichlet

Théorème 1.3 *Supposons que :*

- $f(x)$ *est définie sur* $[-L, L]$ *sauf peut-être en un nombre fini de points ;*
- $f(x)$ *est périodique de période* $2L$ *;*
- $f(x)$ *et* $f'(x)$ *sont continues par morceaux dans* $[-L, L]$ *;*

alors la série de Fourier converge vers :

- $f(x)$ *si* x *est un point de continuité de* f *;*
- $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *si* x *est un point de discontinuité de* f.

On peut alors écrire :

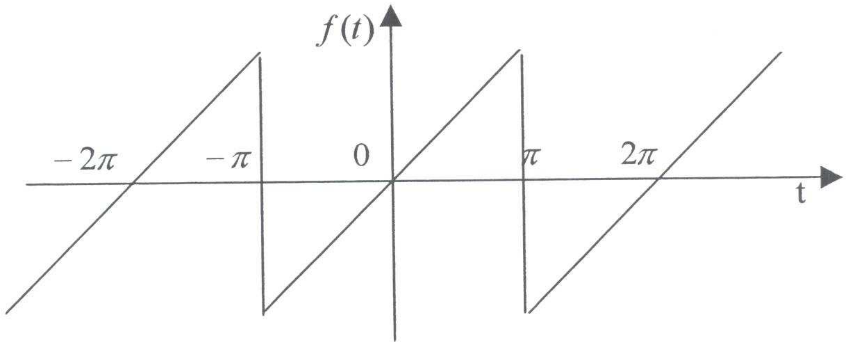
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{10}$$

en tout point de continuité.
Si x est un point de discontinuité, le membre de gauche de l'équation précédente doit être remplacé par la valeur moyenne de f au point de discontinuité, c'est-à-dire :

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{11}$$

1.4 Exemples

1. Soit la fonction $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$ et périodique de période 2π.



Cette fonction vérifie les conditions de Dirichlet d'existence de la série de Fourier.
Calculons ses coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt \mathrm{d}t \quad \forall n \neq 0 \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne directement :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \cos nt \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{\sin nt}{t} \end{array} \right.$$

soit :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t \sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{n} \mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{n^2 \pi} \left[\cos nt \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\mathrm{d}t \quad \forall n \neq 0$$

Une intégration par parties donne directement :

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin nt \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{\cos nt}{t} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{\pi n}\left[t\cos t\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\pi n}\left(\pi\cos n\pi + \pi\cos(-n\pi)\right) + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi}\left(\sin n\pi + \sin n\pi\right) \\ &= -\frac{2}{n}\cos n\pi \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

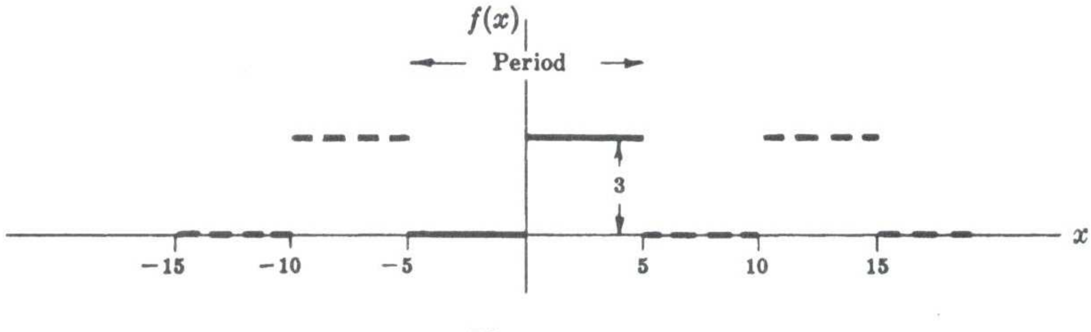
Nous pouvons donc écrire :

$$t = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kt \quad \text{sur } [-\pi, \pi] \tag{12}$$

2. Trouver les coefficients de Fourier correspondant à la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{pour } 0 < x < 5 \end{cases}$$

et de période 10, et écrire la série de Fourier correspondante. Comment faudrait-il définir f en $x = -5, 0,$ et 5 pour que la série de Fourier converge sur $-5 \leqslant x \leqslant 5$ vers $f(x)$?



Comme la période est de $2L = 10$, on a $L = 5$. Choisissons l'intervalle d'intégration de telle sorte que $c + 2L = 5$, c'est-à-dire $c = -5$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{5}\int_0^5 f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\frac{5}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5 \\ &= \frac{3}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin 0\right) = 0 \quad \text{si } n \neq 0 \end{aligned}$$

Si $n = 0$,

$$a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int_0^5 \mathrm{d}x = \frac{3}{5}.5 = 3$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{5}\int_0^5 f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\frac{-5}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5 \\
&= \frac{-3}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi)
\end{aligned}$$

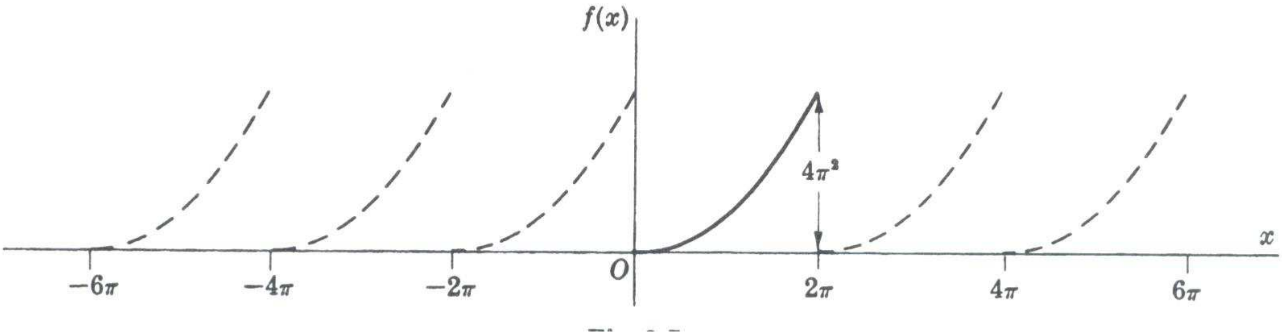
La série de Fourier correspondante à $f(x)$ est donc :

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) &= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{5} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Comme $f(x)$ vérifie les conditions de Dirichlet, la série converge vers $f(x)\,\forall x$ qui correspond à un point de continuité et vers $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ aux points de discontinuité.
En $x = -5$, $x = 0$ et $x = 5$, la série converge vers $\frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$. Il faut donc définir comme suit la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \text{ si } x = -5 \\ 0 \text{ si } -5 < x < 0 \\ \frac{3}{2} \text{ si } x = 0 \\ 3 \text{ si } 0 < x < 5 \\ \frac{3}{2} \text{ si } x = 5 \end{cases}$$

3. Développer $f(x) = x^2 \quad 0 < x < 2\pi$ en série de Fourier si la période est de 2π.



Comme la période vaut $2L = 2\pi$, on a $L = \pi$; fixons $c = 0$, on a :

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x$$

En intégrant par parties,

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos nx \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$$

on trouve :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\sin nx\mathrm{d}x$$

Une deuxième intégration par parties :

$$\left\{\begin{array}{c} u(x) = x \\ v'(x) = \sin nx \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right.$$

donne :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2}\left[x\cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2}\left[x\cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^3}\left[\sin nx\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2}(2\pi\cos 2n\pi - 0) = \frac{4\pi}{n^2\pi} = \frac{4}{n^2} \qquad \text{pour } n \neq 0 \end{aligned}$$

Si $n = 0$, on a :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{8\pi^3}{3} = \frac{8\pi^2}{3}$$

De la même façon, on obtient :

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x$$

En intégrant par parties,

$$\left\{\begin{array}{c} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin nx \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right.$$

on trouve :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos nx\mathrm{d}x$$

Une deuxième intégration par parties :

$$\left\{\begin{array}{c} u(x) = x \\ v'(x) = \cos nx \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right.$$

donne :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\frac{-1}{n}\left[x^2\cos nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2}\left[x\sin nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{-1}{n}\left[x^2\cos nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2}\left[x\sin nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^3}\left[\cos nx\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{-1}{n}.4\pi^2 + \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^3}.0 = -\frac{4\pi}{n} \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right) \qquad \text{pour } 0 < x < 2\pi$$

Exercice 1
Calculer le terme général du développement de Fourier des fonctions suivantes et écrire les 4 premiers termes non nuls de celui-ci :

- $$f(t) = \left\{\begin{array}{c} -1 \text{ sur } [-\pi, 0[\\ 1 \text{ sur } [0, \pi[\end{array}\right. \qquad \text{et périodique.}$$

- $$f(t) = \left\{\begin{array}{c} 2t \text{ sur } [-\pi, 0[\\ t \text{ sur } [0, \pi[\end{array}\right. \qquad \text{et périodique.}$$

- $$f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi+t}{2} \text{ sur } [-\pi, 0[\\ \frac{1}{2}(\pi - t) \text{ sur } [0, \pi[\end{cases} \quad \text{et périodique.}$$

- $$f(t) = t^2 \text{ sur } [-2, 2] \text{ et périodique}$$

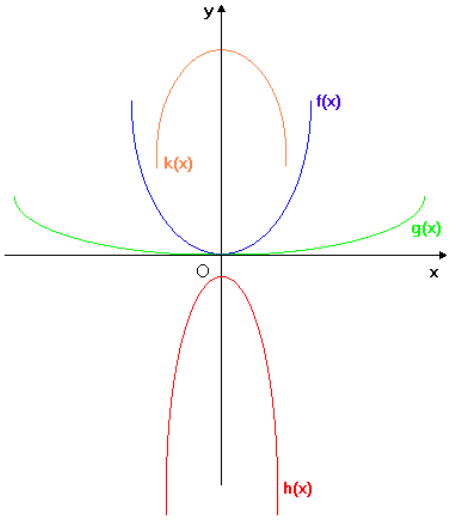
- $$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t \text{ sur } [0, \frac{\pi}{\omega}[\\ 0 \text{ sur } [-\frac{\pi}{\omega}, 0] \end{cases} \quad \text{et périodique.}$$

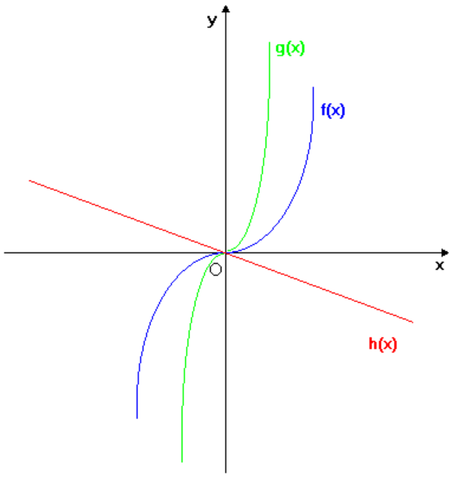
1.5 Séries de Fourier des fonctions paires et impaires

1.5.1 Rappel : fonctions paires et impaires

- Une fonction $f(x)$ est paire si et seulement si $f(-x) = f(x)\, \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.
  Si une fonction est paire, alors :
  $$\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{L} f(x)\mathrm{d}x$$
  car son graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical.
- Une fonction $f(x)$ est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)\, \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ Si une fonction est impaire, alors :
  $$\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x = 0$$
  car son graphe est symétrique par rapport à l'origine des axes $(0, 0)$.

Mais une fonction dont la courbe représentative possède un axe ou un centre de symétrie n'est pas forcément paire ou impaire : il est nécessaire que le centre soit O ou l'axe soit (Oy).





1.5.2 Séries de Fourier des fonctions paires et impaires

Par conséquent, si une fonction est paire, la série de Fourier correspondante ne comptera que des termes cosinusoïdaux et un terme constant et s'écrira :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L} \tag{13}$$

En effet :

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \mathrm{d}x = 0$$

car $f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}$ est une fonction impaire.
Les coefficients a_k peuvent se calculer comme suit :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{d}x = \\ a_k &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\mathrm{d}x = \end{aligned}$$

Pour une fonction impaire, la série de Fourier ne comptera que des termes sinusoïdaux et s'écrira donc :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{L} \tag{14}$$

En effet :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\mathrm{d}x = 0 \\ a_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

car $f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}$ est une fonction impaire.
Les coefficients b_k peuvent se calculer comme suit :

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\mathrm{d}x =$$

1.5.3 Séries de Fourier en sinus ou en cosinus

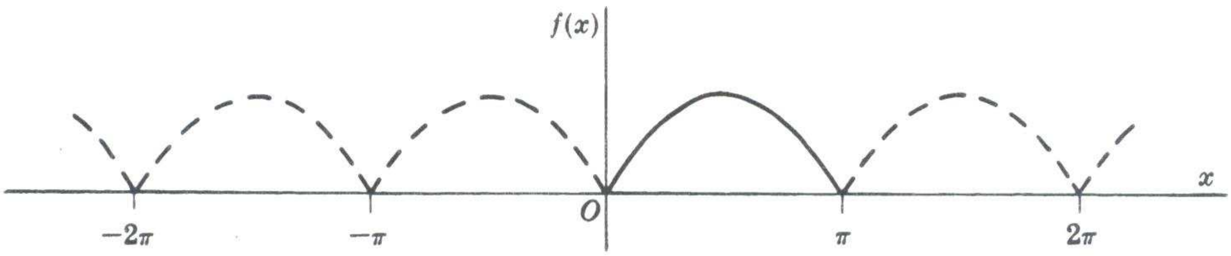
Une fonction définie sur l'intervalle $[0, L]$ et prolongée sur l'intervalle $[-L, 0]$ pour en faire une fonction paire (*resp.* impaire) admet un développement en séries de Fourier en cosinus (*resp.* en sinus). on a alors, dans le cas d'une fonction paire :

$$b_n = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$$

et dans le cas d'une fonction impaire :

$$a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$$

Exemple :
Développons $f(x) = \sin x \quad \forall 0 < x < \pi$ en série de Fourier de cosinus ; on la prolonge d'abord en une fonction paire pour obtenir des cosinus.



On a $b_n = 0$ et :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos\frac{n\pi x}{\pi}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(x+nx)+\sin(x-nx))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(x+nx)}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos n\pi}{n+1}+\frac{-\cos n\pi-1}{n-1}\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{\cos n\pi+1}{n-1}\right\} \\
&= -2\frac{1+\cos n\pi}{\pi(n^2-1)} \qquad \text{si } n \neq 1
\end{aligned}$$

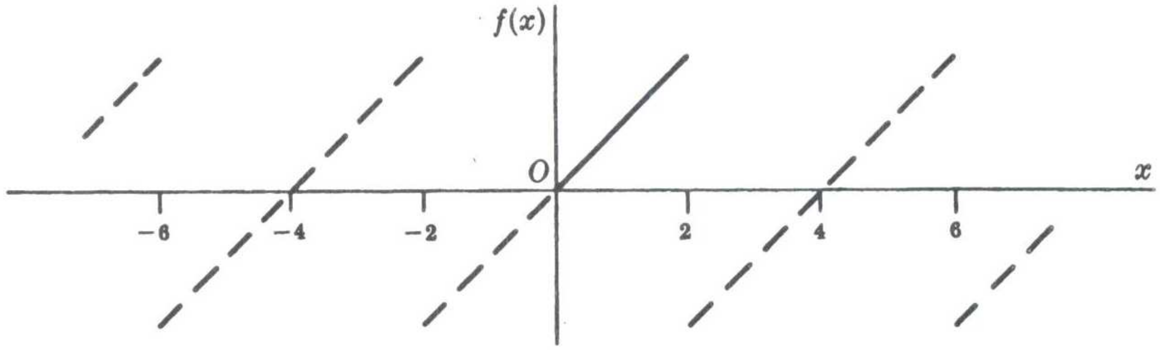
Pour $n = 1$, on obtient :

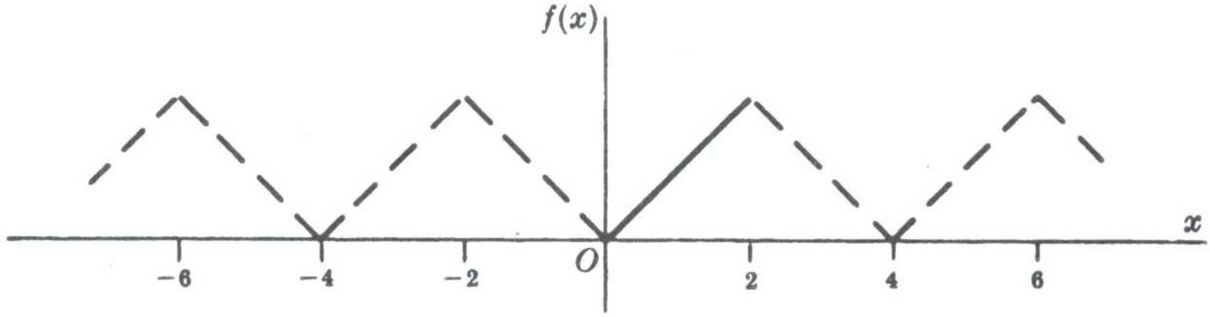
$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^\pi = 0$$

Finalement, on a :

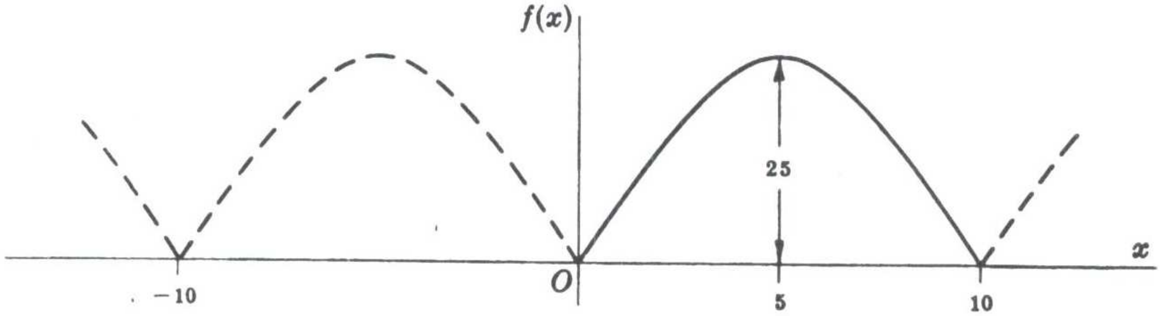
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\cos nx \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}+\frac{\cos 6x}{6^2-1}+\cdots\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2
Développer $f(x) = x \quad \forall 0 < x < 2$ en séries de sinus et en séries de cosinus.





Exercice 3
Même question pour la fonction $f(x) = x^2 \quad \forall 0 < x < 2$ en séries de cosinus.



2 Identité de Parseval

Si a_n et b_n sont les coefficients de Fourir de la série correspondant à $f(x)$, si $f(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet, et si la série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$, alors on a la formule suivante :

Théorème 2.1 *(Identité de Parseval) :*

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{15}$$

Preuve Si $f(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet, on a en tout point de continuité :

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\tfrac{n\pi x}{L} + b_n \sin\tfrac{n\pi x}{L}\right)$$

Cette identité est en fait valable $\forall x$ si la série de Fourier converge uniformément, parce qu'alors $f(x)$ est continue en tout point.
Multiplions par $f(x)$ et intégrons terme par terme entre $-L$ et L (ce qui est justifié comme la série converge uniformément). On obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x + b_n\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x\right\}\\ &= \frac{a_0^2}{2}L + L\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\end{aligned}$$

En divisant par L, on obtient l'identité de Parseval.

Exemple :
Reprenons la série de Fourier en cosinus de la fonction $f(x) = x \quad \forall 0 < x < 2$ prolongée de façon paire :

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

Ici, $L = 2$, $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\forall n \neq 0$, $b_n = 0$. L'identité de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{2^2}{2} + L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi - 1)^2$$

et donc :

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right)$$

Finalement, on a :

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

On peut en déduire la somme S de la série :

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

En effet :

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) \\ &= \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16} \end{aligned}$$

donc $S = \frac{\pi^4}{90}$.

3 Intégration et dérivation des séries de Fourier

Les théorèmes sur l'intégration et la dérivation des séries terme par terme peuvent être appliqués si la convergence de ces séries est uniforme, mais ces théorèmes donnent des conditions suffisantes mais non nécessaires. Le théorème suivant est très utile :

Théorème 3.1 *(Intégration des séries de Fourier) :*
La série de Fourier correspondant à $f(x)$ peut être intégrée terme par terme de a à x et la série résultante convergera uniformément vers $\int_a^x f(u)\mathrm{d}u$ pourvu que f soit continue par morceaux sur $-L \leqslant x \leqslant L$ et qu'à la fois a et x soient dans cet intervalle.

Exemple :
Trouvons la série de Fourier correspondant à $f(x) = x^2 \quad \forall 0 < x < 2$. En intégrant terme par terme la série correspondant à $f(x) = x \quad \forall 0 < x < 2$ étendue de façon impaire à $-2 < x < 2$:

$$f(x) = x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right)$$

Intégrons les deux membres de 0 à x en appliquant le théorème précédent et multiplions par 2 :

$$x^2 = C - \frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi s}{2} + \cdots\right)$$

où on a posé :

$$C = \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$

Comme cette série représente aussi la série de Fourier en cosinus de la fonction $x^2 \quad \forall 0 < x < 2$ étendue de façon paire, on a aussi :

$$\begin{aligned} C &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

On déduit donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{16}.\frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{12}$$

Remarque : la dérivation terme à terme de cette série n'est pas valide. En effet, on obtient :

$$2\left(\cos\tfrac{\pi x}{2} - \cos\tfrac{2\pi x}{2} + \cos\tfrac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

Le $n^{\text{ième}}$ terme de cette série ne tend pas vers 0, la série ne converge donc pour aucune valeur de x.

4 Séries de Fourier à termes complexes

En utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= \cos\theta + j\sin\theta \\ e^{-j\theta} &= \cos\theta - j\sin\theta \end{aligned}$$

on déduit :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned}$$

Remplaçons dans la série de Fourier correspondant à $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{j\frac{n\pi x}{L}}+e^{-j\frac{n\pi x}{L}}}{2} + b_n\frac{e^{j\frac{n\pi x}{L}}-e^{-j\frac{n\pi x}{L}}}{2j}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{j\frac{n\pi x}{L}} + \frac{a_n+jb_n}{2}e^{-j\frac{n\pi x}{L}}\right) \end{aligned}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{a_n-jb_n}{2} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L} - j\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \\ \frac{a_n+jb_n}{2} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L} + j\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{a_n-jb_n}{2} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-j\frac{n\pi x}{L}}\mathrm{d}x \equiv c_n \\ \frac{a_n+jb_n}{2} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{j\frac{n\pi x}{L}}\mathrm{d}x \equiv c_{-n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{aligned}$$

et :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x \equiv c_0$$

La série de Fourier correspondant à $f(x)$ peut se réécrire en utilisant ces nouveaux coefficients :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{n\pi x}{L}} \tag{16}$$

avec :

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-j\frac{n\pi x}{L}}\mathrm{d}x \tag{17}$$

Remarque : en égalant la série de Fourier à $f(x)$, on a supposé que les conditions de Dirichlet sont vérifiées et que $f(x)$ est continue en x. Si $f(x)$ est discontinue en x, le membre de gauche de l'équation (16) doit être remplacé par $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

5 Exercices

Exercice 4

- Ecrire le terme général et les 4 premiers termes non nuls du développement en série de cosinus de :

$$f(x) = -x + 2 \text{ sur } [0, 2]$$

et représenter graphiquement la fonction prolongée.

- Idem pour :

$$f(x) = -x^2 \text{ sur } [0, 1]$$

en série de sinus.

Exercice 5
Tracer chacune des fonctions suivantes et trouver la série de Fourier correspondante.

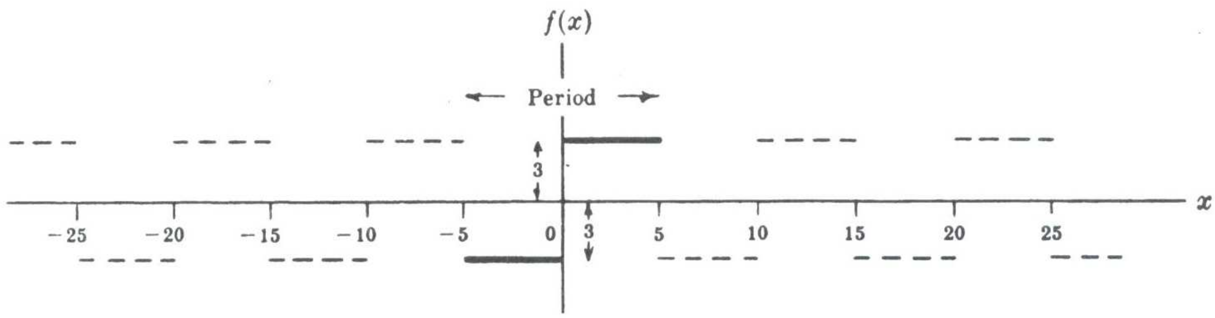
- $$f(x) = \begin{cases} 8 \text{ sur } 0 < x < 2 \\ -8 \text{ sur } 2 < x < 4 \end{cases} \quad \text{et de période 4.}$$

- $$f(x) = \begin{cases} -x \text{ sur } -4 \leqslant x \leqslant 0 \\ x \text{ sur } 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \quad \text{et de période 8.}$$

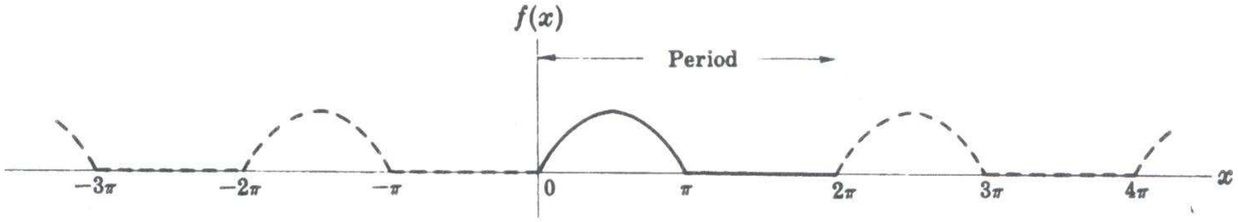
- $$f(x) = \{ \; 4x \text{ sur } 0 < x < 10 \quad \text{et de période 10.}$$

- $$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ sur } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \text{ sur } -3 < x < 0 \end{cases} \quad \text{et de période 6.}$$

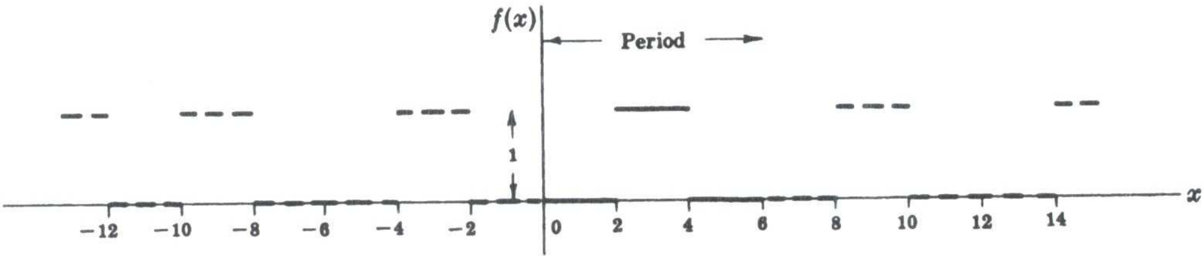
Exercice 6
Identifiez les fonctions suivantes et trouvez les séries de Fourier correspondantes :

- 

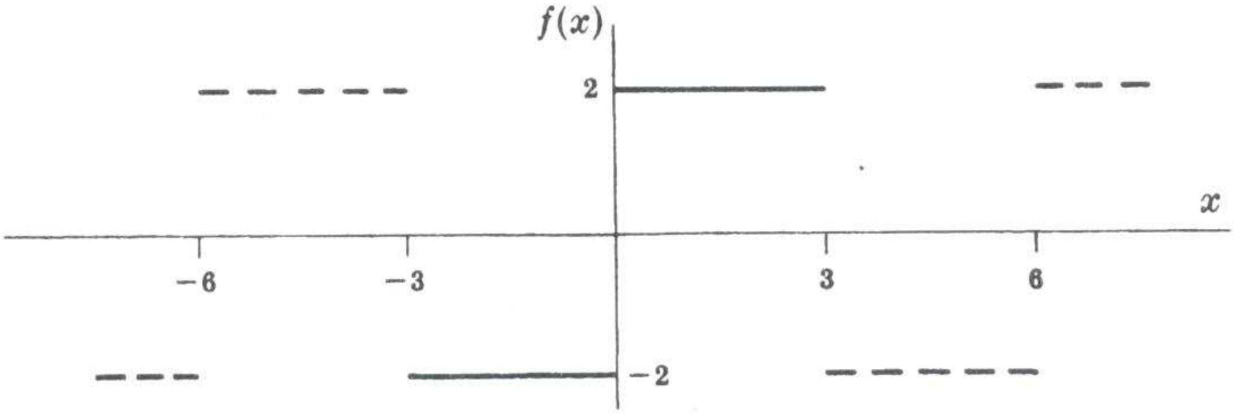
-


f(x)
Period
x
−3π
−2π
−π
0
π
2π
3π
4π

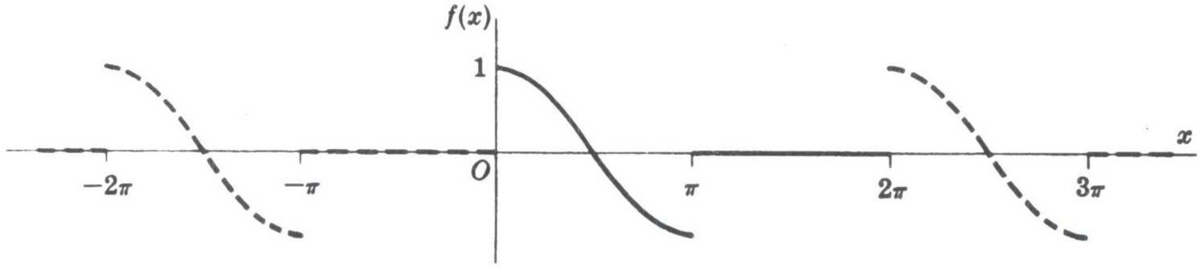
-


f(x)
Period
1
x
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

-


f(x)
2
x
−6
−3
3
6
−2

-


f(x)
1
x
−2π
−π
O
π
2π
3π

6 Séries de Fourier en traitement du signal

Pour le traitement du signal, la forme :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + b_k \sin \frac{k\pi t}{L} \right)$$

n'a aucune utilité. Elle est remplacée par la série complexe ou la série en cosinus.
Appelons T la période (jusqu'ici notée $2L$) et introduisons son inverse $f = \frac{1}{T}$ qui est appelée la fréquence du signal ; $\frac{k\pi t}{L}$ devient $\frac{2k\pi t}{T} = 2\pi k f t$.
En prenant en compte la relation trigonométrique suivante :

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \left(x + \arctan \frac{-B}{A} \right)$$

qui s'obtient comme suit :

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \right\}$$

Posons :

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

On a :

$$\begin{aligned} A \cos x + B \sin x &= \sqrt{A^2 + B^2} \left\{ \cos x \cos \varphi - \sin x \sin \varphi \right\} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \varphi) \end{aligned}$$

où φ est donc tel que :

$$\tan \varphi = -\frac{B}{A} \text{ c'est-à-dire } \varphi = \text{Arctan} \left(\frac{-B}{A} \right)$$

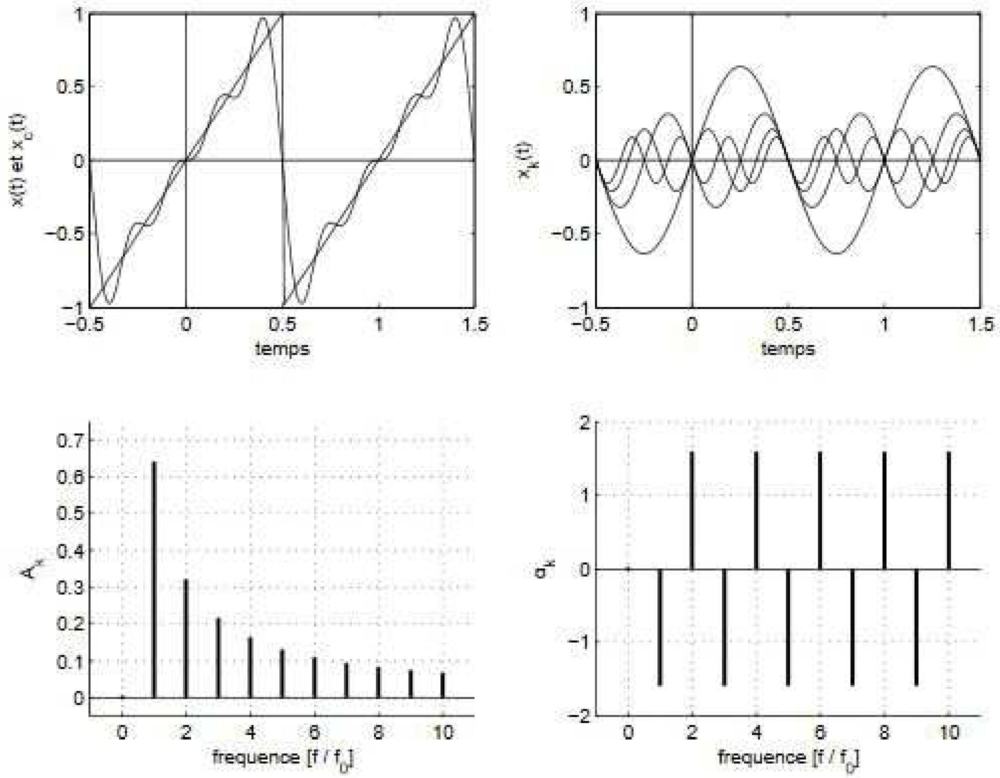
Le développement en série de Fourier de $f(t)$ peut donc se mettre sous la forme :

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left(2\pi k f t + \alpha_k \right) \tag{18}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{c} A_0 = \frac{a_0}{2} \\ A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \alpha_k = \text{Arctan} \left(\frac{-b_k}{a_k} \right) \end{array} \right.$$

.
Exemple : onde en dents de scie.



La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de spectre unilatéral
En notant $X(jk)$ les coefficients c_k de la série de Fourier complexe de $f(t)$, on a aussi :

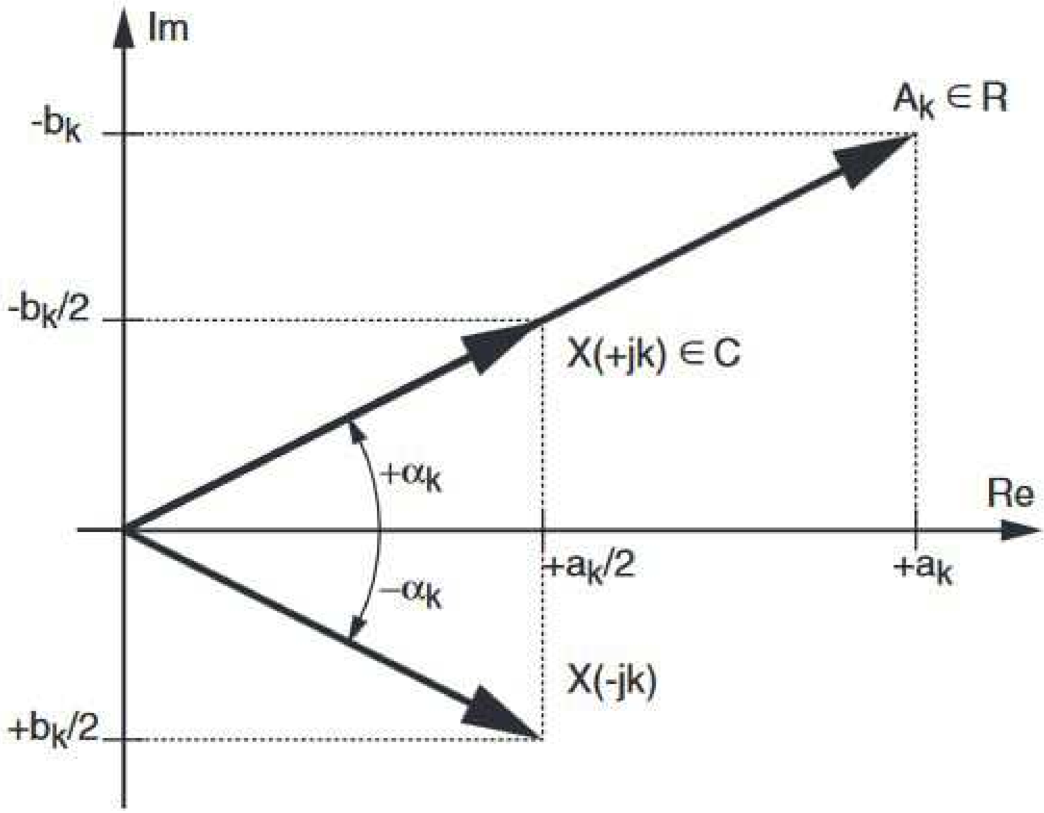
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk) e^{j2\pi kft}$$

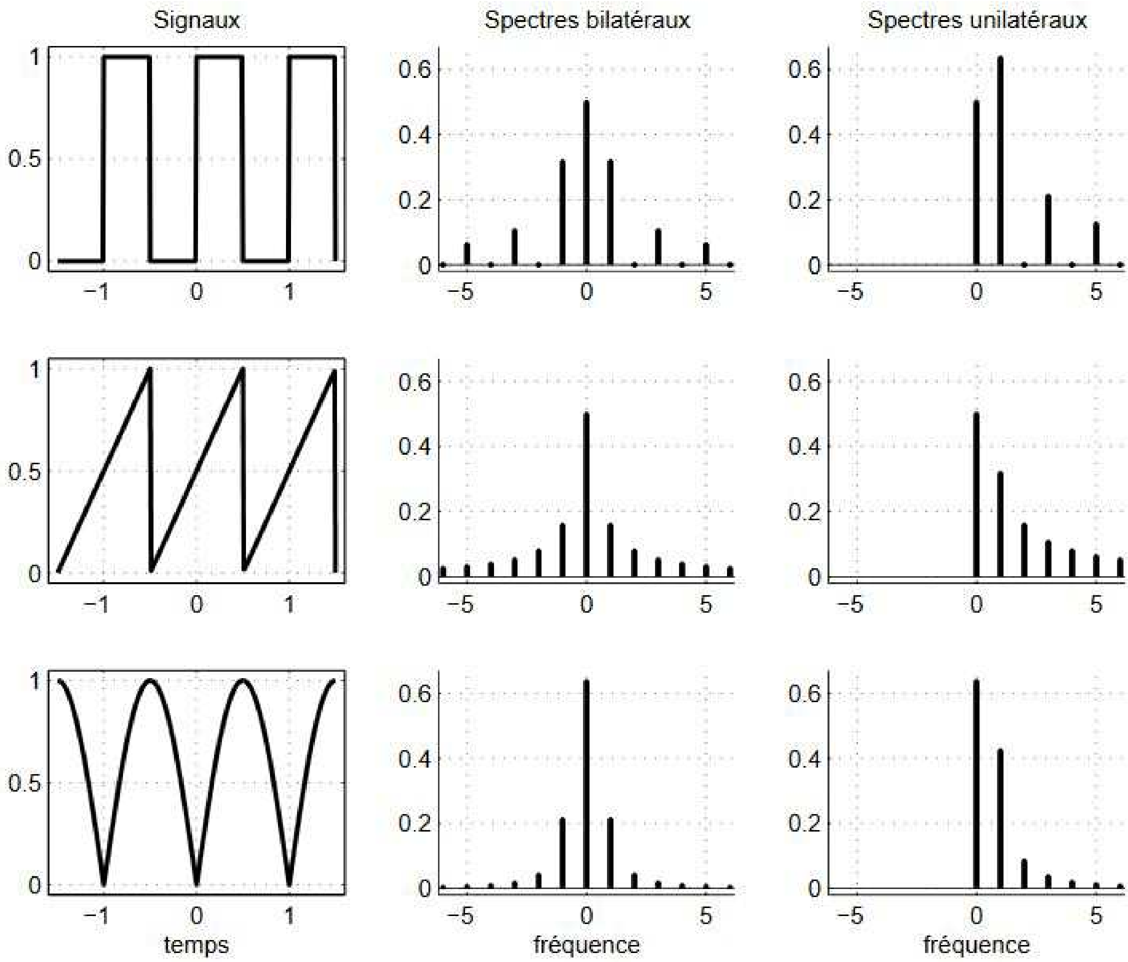
avec :

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi kft}$$

La représentation spectrale graphique porte le nom de spectre bilatéral.
Les relations existant entre les trois représentations de Fourier sont présentées et illustrées dans le tableau et l'image ci-dessous.

$k=0$	$a_0/2$	A_0	$X(0)$
$k>0$	$\{a_k, b_k\}$	$\{A_k, \alpha_k\}$	$X(\pm jk)$
a_k	a_k	$+A_k\cos(\alpha_k)$	$+2\,Re\{X(jk)\}$
b_k	b_k	$-A_k\sin(\alpha_k)$	$-2\,Im\{X(jk)\}$
A_k	$\sqrt{a_k^2+b_k^2}$	A_k	$2\lvert X(jk)\rvert$
α_k	$\arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$	α_k	$\arctan\left(\frac{Im\{X(+jk)\}}{Re\{X(+jk)\}}\right)$
$X(+jk)$	$\frac{1}{2}(a_k-jb_k)$	$\frac{1}{2}A_k\exp(+j\alpha_k)$	$X(+jk)$
$X(-jk)$	$\frac{1}{2}(a_k+jb_k)$	$\frac{1}{2}A_k\exp(-j\alpha_k)$	$X(-jk)$





Signaux	P	$X(0)$	$X(jk)$	
carré :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-j\,\frac{1}{k\pi}$	si k est impair, 0 sinon
dents-de-scie :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+j\,\frac{(-1)^k}{2k\pi}$	$-\infty < k < +\infty$
sinus redressé :	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{-2}{\pi(4k^2-1)}$	$-\infty < k < +\infty$