Chapitre 3 : équations différentielles

1 Introduction sur les équations différentielles en général

Une équation différentielle est une équation liant une fonction et sa ou ses dérivée(s). La résoudre revient à trouver une expression générale pour toutes ses solutions. On se limitera dans ce cours aux équations linéaires, du premier ordre à coefficients fonctionnels et du deuxième ordre à coefficients constants.

1.1 Définition

Une équation différentielle (E.D) est une égalité liant une fonction et ses dérivées successives. On peut l'écrire de la manière la plus générale :

$$R(f, f', f'', ...f^{(n)})(x) = g(x) \tag{1}$$

où R est une fonction de $(n+1)$ variables et g une fonction de la variable x.

Les E.D font donc partie des équations fonctionnelles, dont l'inconnue est une fonction, et non un nombre.
Résoudre une telle E.D signifie : déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.
Remarque : il existe une grande variété d'équations différentielles, et elles sont en général beaucoup plus difficiles à résoudre que les équations simples. On se limitera dans ce cours aux exemples classiques.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre un

2.1 Définitions

Soient a, b et c trois fonctions de la variable réelle, a ne s'annulant pas. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dérivable. Une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre un est alors une relation de la forme :

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x) f'(x) + b(x) f(x) = c(x) \tag{2}$$

L'équation différentielle ordinaire linéaire homogène d'ordre un associée à cette dernière est :

$$(E_0) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x) f'(x) + b(x) f(x) = 0 \tag{3}$$

On appelle solution de l'équation différentielle toute fonction dérivable vérifiant la relation concernée. On appelle ensemble des solutions de l'équation différentielle les seules fonctions vérifiant la relation concernée.
Exemples :

- Préciser les valeurs de $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ dans l'équation suivante et donner l'équation homogène associée.

$$xf'(x) - 3f(x) = \sin x$$

- Préciser les valeurs de $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ dans l'équation suivante et donner l'équation homogène associée, sachant que la variable est t et que la fonction inconnue est notée y.

$$t^2 y'(t) - 3y(t) = \sin(t)$$

Un cas particulier important concerne le cas où ces fonctions sont constantes.

2.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

L'équation $y' = ay + b$ avec a et b réels est parmi les équations différentielles les plus simples, mais aussi les plus importantes.

Théorème 2.1 *Soit a un réel non nul.*

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions :

$$f(x) = ke^{ax} \tag{4}$$

où k est une constante réelle quelconque.

Preuve
Il suffit de dériver une telle fonction pour voir qu'elle est solution.
Réciproquement, si on a une autre solution g, on pose $\phi(x) = g(x)e^{-ax}$.
En dérivant, on trouve que $\phi'(x) = 0$ donc ϕ est constante et $g(x)$ est de la forme annoncée.

Théorème 2.2 Solutions de l'équation $y' = ay + b$
Soient a et b des réels non nuls.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions :

$$f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}, \tag{5}$$

où k est une constante réelle quelconque.

Preuve
Il est évident qu'une telle fonction est solution.
Réciproquement, si on a une autre solution $f(x)$, posons $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$. Alors g est solution de l'équation sans second membre et d'après le théorème précédent, elle se ramène à la forme annoncée.

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes.

$$\begin{aligned} &y' = y \\ &y' = -2y \\ &y' - 2y = 3 \\ &5y' - 2y = 3 \end{aligned}$$

2.2.1 La condition initiale

Le fait de fixer une seule valeur de la fonction solution suffit à la définir parfaitement.

Le sens physique de cette remarque est très intuitif : un système physique régi par une équation différentielle du premier ordre voit son état déterminé par un seul nombre $f(x)$ qui dépend de la variable x (en général le temps).

La connaissance de cet état à un instant donné (disons l'instant $x = 0$ par exemple) détermine l'état du système à tout instant.

C'est ce qu'on appelle la **condition initiale**.

Théorème 2.3 Théorème de Cauchy
Deux nombres réels x_0 et y_0 étant donnés, il existe une unique solution f de l'équation $y' = ay + b$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Preuve
Il suffit de voir que la donnée de x_0 et y_0 suffit à fixer un unique k.

2.3 Équations différentielles linéaires quelconques à coefficients constants

Soient a, b et c trois nombres complexes, a étant non-nul. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dérivable. Une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre un à coefficients constants est alors une relation de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad af'(x) + bf(x) = c \tag{6}$$

L'équation différentielle ordinaire linéaire homogène d'ordre un à coefficients constants associée à cette dernière est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad af'(x) + bf(x) = 0 \tag{7}$$

2.3.1 Solutions de l'équation homogène

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$S = \left\{ Ae^{-\frac{b}{a}x} \mid A \in \mathbb{C} \right\}. \tag{8}$$

Preuve
C'est un cas particulier évident de l'équation différentielle particulière étudiée au paragraphe précédent.

2.3.2 Solutions de l'équation complète

L'ensemble des solutions de l'équation complète est :

$$S = \left\{ Ae^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b} \mid A \in \mathbb{C} \right\}. \tag{9}$$

Preuve
C'est un cas particulier évident de l'équation différentielle particulière étudiée au paragraphe précédent.

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes.

- $y' = y$; $y(0) = 1$
- $y' = -2y$; $y(1) = 3$
- $y' - 2y = 3$; $y(0) = 3$
- $5y' - 2y = 3$; $y(-2) = 0$

Exercice 3 Équations homogènes à coefficients constants

- Déterminer la solution générale de l'équation $y' + 2y = 0$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 2$

Exercice 4 Équations avec second membre à coefficients constants

- Déterminer la solution générale de l'équation $y' + 2y = 3$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = -1$

2.4 Retour au cas général des équations linéaires d'ordre un à coefficients variables

2.4.1 Espaces vectoriels

La linéarité d'une équation différentielle a des conséquences importantes facilitant la recherche de solutions.

- Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions. Dans le cas d'une équation d'ordre 1, ce sous-espace est de dimension 1.
- Les solutions d'une équation différentielle linéaire forment un sous-espace affine de l'espace affine des fonctions. Dans le cas d'une équation d'ordre 1, cet espace est de dimension 1.

Ces considérations géométriques donnent le théorème suivant, très important dans la résolution en pratique.

Théorème 2.4 *Les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre un sont la somme d'une solution à l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète.*

Le problème est souvent de déterminer cette solution particulière.
Par exemple, si a et b sont des constantes non nulles et c une fonction polynôme ou trigonométrique, on cherchera alors une solution particulière de la forme :

- d'un polynôme de degré n si c est un polynôme de degré n ;
- d'une combinaison linéaire de $\cos(\omega x + \phi)$ et $\sin(\omega x + \phi)$ si $c(x) = A\cos(\omega x + \phi) + B\sin(\omega x + \phi)$.

Si c est la somme de plusieurs fonctions c_1 et c_2, on peut chercher une solution particulière de l'équation différentielle de second membre c_1, puis une solution particulière de l'équation différentielle de second membre c_2, puis faire la somme de ces deux solutions particulières. On obtient alors une solution particulière de l'équation de départ.

2.4.2 La condition initiale

L'ensemble des solutions d'une E.D.L. du premier ordre étant un espace vectoriel de dimension 1, le fait de fixer une seule valeur de la fonction solution suffit à la définir parfaitement.
Le théorème de Cauchy s'étend donc à toutes les équations différentielles d'ordre un :

Théorème 2.5 Théorème de Cauchy
Deux nombres x_0 *et* y_0 *étant donnés, il existe une unique solution à une équation différentielle linéaire d'ordre un vérifiant* $f(x_0) = y_0$.

2.4.3 Équation homogène associée

L'équation différentielle linéaire homogène d'ordre un associée à l'équation (E) est :

$$(E_0) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x) f'(x) + b(x) f(x) = 0 \tag{10}$$

2.4.4 Solutions de l'équation homogène

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène d'ordre un est : :

$$S_0 = \left\{ Ae^{-\Phi(x)} | A \in \mathbb{C} \right\} \tag{11}$$

où Φ est une primitive de : $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)}$.

Preuve
En effet, dans le cas général, l'équation différentielle linéaire homogène s'écrit

$$a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0\,.$$

En travaillant sur un intervalle I où $a(x)$ ne s'annule pas, cette équation est équivalente à

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)} \cdot y = 0$$

Et, en notant $A(x)$ une primitive de la fonction $\frac{b(x)}{a(x)}$, c'est-à-dire que $A'(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, par exemple :

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t$$

(où x_0 est un réel que l'on fixe, par exemple 0)
l'équation est équivalente à

$$\begin{aligned} y' + \frac{b(x)}{a(x)} \cdot y &= 0 \\ y' \cdot e^{A(x)} + y \cdot \frac{b(x)}{a(x)} \cdot e^{A(x)} &= 0 \\ y' \cdot e^{A(x)} + y \cdot A'(x) \cdot e^{A(x)} &= 0 \end{aligned}$$

Cette forme est du type $u' \cdot v + u \cdot v'$, qui se simplifie en $(u \cdot v)'$ avec $u(x) = y(x)$ et $v(x) = e^{A(x)}$, donc l'équation est équivalente à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y \cdot e^{A(x)}) = 0$$

L'équation est équivalente à :

$$y \cdot e^{A(x)} = C$$

L'ensemble des solutions est alors formé des fonctions, définies sur I, de la forme

$$y(x) = C \cdot e^{-A(x)}$$

où C est une constante réelle dont la valeur se détermine par la donnée des conditions initiales.
Le calcul de primitive nécessaire n'est pas toujours réalisable à l'aide des fonctions usuelles, la solution peut donc n'avoir qu'une expression sous forme d'intégrale.

2.4.5 Solution de l'équation différentielle complète

L'ensemble des solutions générales de l'équation différentielle d'ordre un est :

$$S = \left\{ \left[A + \int_{x_0}^{x} \frac{c\,(s)}{a\,(s)} e^{+\Phi(s)}\,\mathrm{d}s \right] \cdot e^{-\Phi(x)} \mid A \in \mathbb{C} \right\} \tag{12}$$

Avec

$$\Phi : x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Preuve
On résout de manière générale une équation avec second membre $ay' + by = c$ par la méthode de variation des constantes. Celle-ci consiste à se ramener, par un changement de fonction variable, à un problème de calcul de primitive.

On suppose que, sur l'intervalle d'étude, la fonction a ne s'annule pas.

On écrit la solution générale de l'équation homogène associée $ay' + by = 0$

$$y(x) = Ke^{-A(x)}, K \in \mathbb{R},$$

on prend pour nouvelle fonction variable la fonction k définie par la relation

$$y(x) = k(x)e^{-A(x)},$$

ce qui explique la formulation imagée : on fait « varier la constante », en fait on la remplace par une fonction.

En reportant dans l'équation initiale, on obtient une équation équivalente à l'équation initiale mais portant sur k :

$$a(x)k'(x) = c(x)e^{A(x)}$$

En notant B une primitive de la fonction $\frac{ce^A}{a}$, l'ensemble des solutions est

$$k(x) = B(x) + C$$

La solution générale s'écrit alors sous la forme

$$f(x) = (B(x) + C)e^{-A(x)}$$

Soit finalement

$$f = \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\right)\left\{C + \int \frac{c(x)}{a(x)} \exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x\right\}$$

De nouveau il faut réaliser un calcul de primitive, ce qui peut empêcher de donner l'expression de la solution à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes.

- $xy' - 4y = 0$ sur $]0; +\infty[$
- $x^2y' + y = 0$ sur $]0; +\infty[$
- $xy' - 2y = 3x^2$ sur $]0; +\infty[$
- $5x^2y' - 2y = 3x$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 6 Équations à coefficients constants avec second membre variable

- Déterminer la solution générale de l'équation $y' - 2y = -4t$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 3$

Exercice 7 Équations homogène à coefficients variables

- Déterminer la solution générale de l'équation $y' - 2ty = 0$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = -2$

Exercice 8 Équations à coefficients variables avec second membre

- Déterminer la solution générale de l'équation $y' - 2ty = -2t$
- Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = -2$

Exercice 9 Résolutions générales d'équations complètes
Intégrer les équations suivantes :

1. $(1 + x^2)\, y' + 2xy = 1 + 3x^2$
2. $x(1 + x^2)\, y' + (1 + x^2)\, y = x$
3. $(x^2 - 1)\, y' + xy = x$
4. $(1 - x^2)\, y' + 4xy = ax$, où a est un réel donné.

5. $(x^2-1)\,y' + xy + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

6. $y' - \left(\frac{1+3x^2}{x\,(1+x^2)}\right)\,y = x\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Exercice 10 Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations différentielles suivantes.

- $y'(t) - y(t) = t$; $y'(t) - y(t) = \cos(t)$; $y'(t) + 2y(t) = (t-2)^2$;
- $y'(t) - 2y(t) = t\mathrm{e}^t$; $y'(t) - 2y(t) = t\mathrm{e}^{2t}$; $y'(t) - 2y(t) = \cos(t)$;
- $y'(t) - 2y(t) = t$; $y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{-t}$; $y'(t) - 2y(t) = t\mathrm{e}^{-2t}$.

Exercice 11 Soit (E) l'équation $2y' - y = -t^2 + 5t$.

- Déterminer une solution particulière y_0 de (E) sous la forme $y_0(t) = At^2 + Bt + C$.
- Résoudre, sur $\mathbb{R}$ l'équation (E_0) sans second membre associée.
- En déduire la solution générale de (E) .
- En déduire une solution de (E) vérifiant la condition $y(-1) = 5$.

Exercice 12 Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $y' - y = \sin(2x)\,\mathrm{e}^x$
b) $y' + 2xy = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$
c) $y' + y\tan x = \sin 2x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$

Exercice 13 Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{x^2-1}y = 2x$$

Exercice 14 Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :
a) $y' - (x+1)(y+1) = 0$ et $y(0) = 1$
b) $(1+x^2)y' - (x+1)y = 2$ et $y(0) = -1$.

Exercice 15 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$,
2. $y' = \cos x + y$,
3. $y' + 2y = (x-2)^2$.

Exercice 16 Pour chacune des équations différentielles qui suit : écrire la solution passant par le point M(.,.) et tracer sommairement le graphe de la solution.

1. $y' + 2xy = 0, \quad M = (0,1)$,
2. $y' + y\tan x = \sin x\cos x \quad M = (\frac{\pi}{4}, 0)$,
3. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$, On déterminera $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

Exercice 17 On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, \infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0, \infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E_1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

3. Intégrer (E_1) sur $]0,\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,\infty[$.

Exercice 18 Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) + 2y(t) = 0$;
2. $\dfrac{dx}{dt} - x = 0$;
3. $y'(x) + 2y(x) = 0$ avec $(y - y')(0) = 0$.

Exercice 19 Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(1 + x^2)y' - xy = 0$;
2. $y' + y\tan x = 0$, pour x dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 20 Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène asociée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 21 Résoudre sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ proposé les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1)\ x\ln x y' + y = x,\ I =]1,+\infty[& 2)\ x(xy' + y - x) = 1,\ I =]-\infty,0[\\ 3)\ 2xy' + y = x^4,\ I =]-\infty,0[& 4)\ y' + 2y = x^2 - 3x,\ I = \mathbb{R} \\ 5)\ y' + y = \frac{1}{1+2e^x},\ I = \mathbb{R} & 6)\ y'\sin x - y\cos x + 1 = 0,\ I =]0,\pi[\end{array}$$

Exercice 22 Résoudre l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I =]1,+\infty[$, $I =]-1,1[$, $I =]-1,+\infty[$, $I = \mathbb{R}$.

Exercice 23 Résoudre les équations homogènes du premier ordre suivantes. Préciser le domaine de validité des solutions.

- $y'(t) = 2y(t)$; $\quad y'(t) = -y(t)$; $\quad y'(t) = ty(t)$;
- $t^2y'(t) = -y(t)$; $\quad y'(t) = \dfrac{y(t)}{1+t^2}$; $\quad y'(t) = \dfrac{y(t)}{1-t^2}$;
- $y'(t) = y(t)\dfrac{2t+3}{(t-2)(t+5)}$; $\quad y'(t) = \dfrac{y(t)}{1+\mathrm{e}^t}$; $\quad y'(t) = y(t)\sin(t)$.

Exercice 24 Résoudre les équations différentielles suivantes, par la méthode de variation de la constante. Préciser le domaine de validité des solutions.

- $y'(t) = -2ty(t) + t$; $\quad y'(t) = -y(t)\tan(t) + \sin(t)\cos(t)$; $\quad y'(t) = -\dfrac{y(t)}{t^2-1} + t^2$;
- $y'(t) = \dfrac{y(t)}{t} - 1$; $\quad y'(t) = -\dfrac{y(t)}{t^2} - \dfrac{1}{t^3}$; $\quad y'(t) = -\dfrac{y(t)}{t^2} + \mathrm{e}^{1/t}$;
- $y'(t) = 2ty(t) - (2t-1)\mathrm{e}^t$; $\quad y'(t) = \dfrac{2t-1}{t^2}y(t) + 1$; $\quad y'(t) = \dfrac{3t}{1-t^2}y(t) - \dfrac{t^3}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}$;
- $y'(t) = 2\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}y(t) + \dfrac{1+\cos^2(t)}{\sin(t)}$; $\quad y'(t) = \cos(t)y(t) + 2\cos(t) - \sin^2(t)\cos(t)$;
- $y'(t) = \dfrac{t^2+1}{t(t^2-1)}y(t) + 2$; $\quad y'(t) = -\dfrac{y(t)}{\sqrt{1+t^2}} + 1 - \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$;
- $(t^2+1)y'(t) + 4ty(t) = 1$; $\quad (t^2+1)y'(t) + (t-1)^2y(t) = t^3 - t^2 + t + 1$;
- $y'(t)\cos(t) + y(t)\sin(t) = \cos(t) + t\sin(t)$; $\quad (\mathrm{e}^t - 1)y'(t) + (\mathrm{e}^t + 1)y(t) = 3 + 2\mathrm{e}^t$;
- $t(t-1))y'(t) - (3t-1)y(t) = -t^2(t+1)$; $\quad \cos(t)y'(t) + \sin(t)y(t) = \cos(t) + t\sin(t)$.

2.5 Système autonome de 2 équations différentielles

Définition :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= \psi(x,y) \end{aligned}\right\}$$

avec φ et ψ continues sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, est un système autonome de deux équations différentielles.

Une solution est appelée trajectoire du système autonome.

2.5.1 Système autonome et équation différentielle

On peut transformer un système autonome en équation différentielle classique $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}$ Cela revient à faire disparaître ≪ t ≫

Réciproquement, une équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}$ peut se transformer en système autonome en ≪ ajoutant ≫ du temps ≪ t ≫.

Le tout est de bien choisir les deux fonctions φ et ψ de façon à savoir intégrer le système autonome. On aura ainsi les trajectoires du système qui sont les courbes intégrales de l'équation différentielle en paramétriques.

2.5.2 Exemple

Soit l'équation différentielle $y' = \dfrac{1+y}{2x+y}$, on pose

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x+y \\ \frac{dy}{dt} &= 1+y \end{aligned}\right.$$

Il est facile d'intégrer cette dernière équation, cela donne :$y = \lambda e^t - 1$, valeur que l'on reporte dans la première :$\dfrac{dx}{dt} = 2x+\lambda e^t - 1$. Il est encore facile d'intégrer cette équation, cela donne cette fois : $x = \mu e^t - \lambda e^t + \dfrac{1}{2}$.
Finalement, on a les courbes intégrales en paramétriques :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \mu e^t - \lambda e^t + \frac{1}{2} \\ y &= \lambda e^t - 1 \end{aligned}\right.$$

2.5.3 Intégration d'un système autonome

Si l'une des deux est une équation différentielle, on l'intègre et on reporte dans l'autre.
On peut aussi essayer de l'intégrer en passant en complexes,$z = x + iy$, en polaires ou par un autre changement de variable en suivant les indications de l'énoncé.

Exercice 25 Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$.

Exercice 26 Résoudre le système différentiel réel suivant

$$\begin{cases} x' = \cos(t)\,x + \sin(t)\,y \\ y' = -\sin(t)\,x + \cos(t)\,y \end{cases}$$

Exercice 27 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2 \end{cases}$$

Exercice 28 Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$$

Exercice 29 Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - \mathrm{e}^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Exercice 30 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Exercice 31 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Exercice 32 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

Exercice 33 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 34 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice 35 Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

3 Équation différentielle d'ordre un à variables séparées

Une équation différentielle d'ordre un à variables séparées est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$y' = f(x)g(y) \tag{13}$$

3.1 Solutions régulières

On recherche dans un premier temps les solutions telles que g(y) n'est jamais nul. De telles solutions sont dites régulières.

3.1.1 Utilisation des notations de Leibniz

Cette présentation classique, notamment pour la résolution de problèmes appliqués, est difficile à justifier mathématiquement mais elle permet d'obtenir une bonne partie des solutions. Elle utilise les notations de Leibniz pour le calcul différentiel. Elle consiste à « séparer les différentielles » en écrivant

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

sous la forme

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

En intégrant séparément chaque membre :

$$H(y) = F(x) + K$$

où H représente une primitive de $1/g$ et F représente une primitive de f et K une constante arbitraire. En outre, la fonction H est continûment dérivable, strictement monotone, donc admet une fonction réciproque de sorte que la solution s'exprime comme

$$y = H^{-1}(F(x) + K) \tag{14}$$

3.1.2 Présentation alternative

Le calcul utilisé précédemment ne possède un sens mathématique précis que si l'on a introduit la notion assez abstraite de différentielle. Il est possible d'en donner une version plus élémentaire, en primitivant chaque membre de l'expression

$$\frac{1}{g(y(x))}y'(x) = f(x),$$

par rapport à la variable x, ce qui conduit à

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y(u))}y'(u)\,du = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du$$

Ce qui, après changement de variable, est de la forme

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(v)}\,dv = \int_{x_0}^{x} f(u)\,du$$

Et la conclusion est identique à celle du paragraphe précédent.

Exercice 36 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y(1+y)$.
2. $y' = \sin x \cos y$.
3. $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.
4. $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.
5. $y' = \sqrt{|y|}$: étudier les problèmes de raccordements.

Exercice 37 Résoudre les équations différentielles suivantes. Préciser le domaine de validité des solutions.

- $y'(t)y(t) = -t$; $y'(t) = \mathrm{e}^{t-y(t)}$; $(1+t^2)y'(t) = 1 + y^2(t)$;
- $y'(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{-y(t)}$; $y'(t) = \dfrac{t}{\cos(y(t))}$; $y'(t) = \dfrac{1+y^2(t)}{t^2}$;
- $y'(t) = \dfrac{t-1}{1+y(t)}$; $y'(t) = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-y(t)}$; $y'(t) = \dfrac{(t-1)(y^2(t)-1)}{y(t)}$;
- $y'(t) = \sin(t)(y^2(t)+1)$; $y'(t) = \dfrac{\pi}{2}\cos(t)\sqrt{1-y^2(t)}$.

4 Équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants avec second membre

4.1 Notations et définitions

Une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficient constants avec second membre est de la forme :

$$af'' + bf' + cf = d(t) \tag{15}$$

On suppose que a n'est pas nul et que d est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Exemples :

- $y'' + y' - 2y = t - 1$
- $y'' + 4y = \sin t$

4.2 Équation homogène associée

L'équation homogène associée ou l'équation sans second membre associée à (E) est :

$$(E_0)\ :\ af'' + bf' + cf = 0 \tag{16}$$

4.2.1 Espace vectoriel

L'ensemble des solutions de (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2.

Cela signifie qu'il suffit de déterminer 2 solutions linéairement indépendantes pour les avoir toutes par combinaison linéaire.

4.2.2 Équation caractéristique

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est (E_c) l'équation caractéristique de (E_0).

Théorème 4.1 *Une solution générale de (E_0) s'écrit différemment selon les solutions de l'équation caractéristique (E_c) :*

- *Si $\Delta > 0$, les solutions de (E_c) sont réelles r_1 et r_2 et la solution générale de (E_0) est :*

$$f(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \tag{17}$$

- *Si $\Delta = 0$, la solution unique r de (E_c) est réelle et la solution générale de (E_0) est :*

$$f(t) = (At + B)e^{rt}. \tag{18}$$

- *Si $\Delta < 0$, les solutions de (E_c) sont les complexes conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ et la solution générale de (E_0) est :*

$$f(t) = (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))e^{\alpha t} \tag{19}$$

Exercice 38 Résoudre les équations homogènes suivantes.

- $y'' + y' - 2y = 0$
- $y'' + 4y = 0$

Exercice 39 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $9y'' - 6y' + y = 0$
3. $4y'' + 4y' + y = 0$
4. $9y'' + y = 0$
5. $9y'' - 6y' = 0$

Exercice 40 Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations différentielles suivantes.

- $y''(t) = y'(t) + 2y(t)$; $y''(t) = -y(t)$; $y''(t) = y(t)$;
- $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0$; $y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) = 0$; $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$;
- $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$; $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$; $y''(t) - 4y(t) = 0$;
- $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$; $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0$; $y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$;
- $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$; $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$; $2y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0$;
- $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$; $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$; $y''(t) = 5y'(t) + 6y(t)$.

4.3 Équation avec second membre

Théorème 4.2 *Une solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (E_0) .*

Remarque : le problème revient alors à trouver une solution particulière de (E), ce qui n'est pas toujours évident.

4.3.1 Cas particulier où $d(t) = e^{\lambda t}P(t)$

Dans le cas où :

$$(E) : af'' + bf' + cf = e^{\lambda t}P(t) \tag{20}$$

où P est un polynôme. Alors on a une solution particulière de la forme :

$$f(t) = e^{\lambda t}Q(t) \tag{21}$$

où Q est un autre polynôme.

Degré de Q :

- Si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique, le degré de Q est le même que celui de P ;
- Si λ est solution simple de l'équation caractéristique, le degré de Q est celui de P plus un ;
- Si λ est solution double de l'équation caractéristique, le degré de Q est celui de P plus deux.

Remarque : ce cas là inclut les fonctions trigonométriques. En effet $\sin(t) = \Im\left(e^{it}\right)$ et $\cos(t) = \Re\left(e^{it}\right)$. Ainsi, pour résoudre une équation faisant intervenir ces fonctions, il faut donc passer par les exponentielles complexes.

4.3.2 Méthode générale

Il existe un procédé systématique de recherche des solutions, connu sous le nom de **méthode de variation des constantes**. Elle peut être justifiée par la théorie générale des équations différentielles linéaires.

Soit l'equation $y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = d(x)$, soient deux solutions y_1, y_2 indépendantes de l'équation homogène (donc un système fondamental de solutions). Alors les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme $y = \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2$, où les fonctions λ, μ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et données par le système

$$\forall x \in I, \qquad \begin{cases} \lambda'(x) \cdot y_1(x) + \mu'(x) \cdot y_2(x) & = 0 \\ \lambda'(x) \cdot y_1'(x) + \mu'(x) \cdot y_2'(x) & = d(x) \end{cases} \tag{22}$$

Dans la pratique, on écrira donc ce système, qui admet une solution pour chaque x. Les fonctions solutions peuvent être primitivées et on obtient non seulement une mais toutes les solutions de l'équation avec second membre (si l'on prend en compte les constantes d'intégration dans ce système).
Remarque : si une fonction multiplie y'' , on pourra diviser toute l'équation par cette fonction afin de revenir au cas étudié ici.
Exemple : **oscillateur amorti et oscillateur forcé en physique**
En physique, on utilise souvent l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = y$. L'équation différentielle homogène associée ($\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$) possède selon le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$ les solutions suivantes :

- $\lambda^2 > \omega_0^2$: $x(t) = e^{-\lambda t}\left(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}\right)$, avec $\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$, dit régime d'amortissement apériodique,
- $\lambda^2 = \omega_0^2$: $x(t) = e^{-\lambda t}\left(At + B\right)$, dit régime d'amortissement critique,
- $\lambda^2 < \omega_0^2$: $x(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$, avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, dit régime d'oscillation amortie pseudo-périodique.

On note aussi cette équation différentielle $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = y$ (en fonction du temps).

Exercice 41 Déterminer une solution générale de (E) : $y'' + 3y' + 2y = 3t + 7$

Exercice 42 Résoudre les équations du second ordre avec second membre suivantes :

- $y'' - 2y' - 3y = 5$
- $y'' + 6y' + 10y = 4$
- $y'' - 4y = t + 1$
- $y'' - y = 5x + 2$
- $y'' - 2y' + y = t^2 - t + 1$
- $y'' + y' - 2y = t - 1$

4.4 Les conditions initiales

L'ensemble des solutions d'une E.D.L du second ordre est un espace vectoriel de dimension 2,
le fait de fixer deux valeurs suffit à la définir parfaitement.
Le sens physique de cette remarque est très intuitif :
un système physique régit par une équation différentielle du second ordre voit son état déterminé par une fonction f(x) ;
pour déterminer cette fonction, il faut donner par exemple une position initiale $f(0)$ et une vitesse initiale $f'(0)$.
C'est ce qu'on appelle les conditions initiales.

Théorème de Cauchy
Soit une valeur de la variable x_0, deux valeurs y_0 et z_0 étant données, il existe une unique solution à une équation différentielle linéaire d'ordre deux vérifiant $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Exercice 43 Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales données, si (E) : $y'' + 4y' - 5y = 10$, $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$

Exercice 44 Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales données.

- $y'' + 4y' - 5y = 10$; $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$
- $y'' + 4y' + 5y = 10x - 2$; $f(0) = 1$; $f'(0) = 1$

- $2y'' - 5y' - 3y = -3t^2 - 10t + 4$; $f(0) = 0$; $f'(0) = -1$

Exercice 45

- Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$
- Déterminer la solution particulière f de la variable t vérifiant les conditions $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.
- Déterminer les réels $K > 0$, $\omega > 0$ et $\phi \in]-\pi;\pi]$ tels que $f(t)$ s'écrive : $f(t) = Kcos(\omega\, t - \phi)$.
- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(t) = -\sqrt{2}$.

Exercice 46 Intégrer l'équation $y'' + 4y = \sin t$

Exercice 47 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' - 2y = t$$

en commençant par rechercher les polynômes solutions.

Exercice 48 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1 + t^2)^2 y''(t) - 2t(1 + t^2)y'(t) + 2(t^2 - 1)y(t) = (1 + t^2)$$

On pourra commencer par rechercher une solution polynomiale de l'équation homogène.

Exercice 49 Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation

$$t^3 y'' + ty' - y = 0$$

Exercice 50 Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation

$$t^2 y'' + ty' - y = 1$$

Exercice 51 Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1 + t^2}$$

par la méthode de la variation des constantes.

Exercice 52 Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan t$$

par la méthode de la variation des constantes.

Exercice 53 Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan^2 t$$

par la méthode de la variation des constantes.

Exercice 54 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' + \frac{2t}{t^2 + 1}y' + \frac{1}{(t^2 + 1)^2}y = \frac{t}{(t^2 + 1)^2}$$

en posant $x = \arctan t$.

Exercice 55 Résoudre l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' - y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(on pourra vérifier que l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution de l'équation homogène associée)

Exercice 56 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$,
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$,
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Exercice 57 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$,
2. $y'' - 2y' + y = e^x$,
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$,
4. $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$ (utiliser le principe de superposition).

Exercice 58 Résoudre l'équation :

$$y'' + k^2 y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

On discutera suivant les valeurs de k et m.

Exercice 59 Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Exercice 60 Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x \sin x.$$

Exercice 61 Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparement les cas $m = 0$ et $m \neq 0$).

Exercice 62 Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations :
a) $y'' + y' - 6y = e^{3x}$, b) $y'' + y' - 6y = e^x(2x + 1)$,
c) $y'' - 4y' + 13y = \cos x$, d) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}(x + 1)$ avec $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Exercice 63 Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations différentielles suivantes.

- $y''(t) - y(t) = t^3 + t^2$; $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^t$; $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^t + \cos(t)$;
- $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = t\mathrm{e}^t \cos(t)$; $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^2 \mathrm{e}^{-t}$; $y''(t) + y(t) = t$;
- $2y''(t) - 3y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^t$; $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t$; $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \sin(t)$;
- $y''(t) - y(t) = \mathrm{e}^{-t}$; $y''(t) - y(t) = t\mathrm{e}^t$; $y''(t) + y(t) = \cos(t)$;
- $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^t$; $y''(t) - y(t) = -6\cos(t) + 2t\sin(t)$;
- $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = t\mathrm{e}^t$; $4y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-t/2}$;
- $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^t \sin(t)$; $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = (t^2 + 1)\mathrm{e}^t$;
- $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = \mathrm{e}^{3t}$; $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = \mathrm{e}^t(2t + 1)$;
- $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{2t}(t + 1)$; $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(t + 1)$;
- $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \mathrm{e}^t + (3t - 1)\mathrm{e}^{2t} + (t - 2)$.

5 Changements de fonctions et de variables

De nombreuses méthodes ont été inventées pour ramener certaines équations aux cas étudiés dans les sections précédentes. L'idée générale consiste à modifier soit la fonction inconnue soit la variable. Nous nous contenterons dans cette section de donner un exemple pour chacun des deux cas.

Le premier exemple est celui des équations de Bernoulli, qui se traitent par un changement de fonction.

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^{\alpha}(t) ,$$

avec α différent de 0 et 1 . Observons tout d'abord que pour $\alpha > 0$, la fonction nulle est solution de cette équation. Pour trouver les autres solutions, on remplace la fonction inconnue y par $z = y^{1-\alpha}$. En dérivant, on obtient :

$$z'(t) = (1-\alpha)y'(t)y^{-\alpha}(t) = (1-\alpha)(a(t)y^{1-\alpha}(t) + b(t)) ,$$

soit

$$z'(t) = (1-\alpha)a(t)z(t) + (1-\alpha)b(t) ,$$

qui est une équation linéaire. Par exemple :

$$y'(t) = \frac{y(t)}{2t} + \frac{1}{2ty(t)} .$$

Le changement de fonction $z(t) = y^2(t)$ conduit à :

$$z'(t) = \frac{z(t)}{t} + \frac{1}{t} .$$

La solution générale de cette équation linéaire est $z(t) = Ct - 1$, sur $]-\infty, 0[$, ou bien $]0, +\infty[$. On en déduit les solutions de l'équation de Bernoulli initiale, sous la forme $y(t) = \sqrt{Ct-1}$, définie seulement si $Ct - 1 \geqslant 0$.

Nous donnons maintenant un exemple de changement de variable, avec les équations d'Euler.

$$t^2y''(t) = aty'(t) + by(t) + h(t) ,$$

où a et b sont deux constantes, h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $t = \mathrm{e}^x$, et $z(x) = y(\mathrm{e}^x)$. On a alors :

$$z'(x) = \mathrm{e}^x y'(\mathrm{e}^x) = ty'(t) .$$

En dérivant une fois de plus,

$$z''(x) = \mathrm{e}^x y'(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{2x} y''(\mathrm{e}^x) = ty'(t) + t^2y''(t) .$$

Pour $t \in \mathbb{R}^{-*}$, le changement de variable $t = -\mathrm{e}^x$ conduit aux mêmes expressions de z' et z'' en fonction de t et y . On se ramène ainsi, pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, à l'équation linéaire du second ordre en z :

$$z''(x) = (a+1)z'(x) + bz(x) + h(\mathrm{e}^x)$$

Par exemple, l'équation $t^2y''(t) = -ty'(t) - y(t)$, se ramène à $z''(x) = -z(x)$, dont la solution générale est $\left\{C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$. La solution générale sur $\mathbb{R}^{+*}$ (respectivement : $\mathbb{R}^{-*}$) s'obtient en remplaçant x par $\ln(t)$ (respectivement : $\ln(-t)$).

Exercice 64 Résoudre les équations de Bernoulli suivantes. Préciser le domaine de validité des solutions.

- $y'(t) = -\dfrac{y(t)}{t} - \dfrac{y^2(t)}{t}$; $\quad y'(t) = \dfrac{y(t)\tan(t)}{3} + \dfrac{1}{3y^2(t)}$;
- $y'(t) = -\dfrac{y(t)}{t} - y^2(t)\ln(t)$; $\quad y'(t) = \dfrac{y(t)}{t} - 2y^2(t)$;
- $y'(t) = \dfrac{2y(t)}{t^2+1} - \dfrac{2\sqrt{y(t)}}{t^2+1}$; $\quad y'(t) = \dfrac{3y(t)}{\sin(t)\cos(t)} - 3(y(t))^{2/3}\sin^3(t)$;
- $ty'(t) + 3y(t) = t^2y^2(t)$; $\quad ty'(t) = 2y(t) - 2\sqrt{y(t)}$.

Exercice 65 Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations d'Euler suivantes.

- $t^2y''(t) = 2ty'(t) - 2y(t)$; $t^2y''(t) = -4ty'(t) - 2y(t)$;
- $t^2y''(t) = -ty'(t) + y(t)$; $t^2y''(t) = ty'(t) - y(t)$;
- $t^2y''(t) - ty'(t) + 2y(t) = t$; $t^2y''(t) - 2y(t) = t$;
- $t^2y''(t) + ty'(t) + y(t) = t\ln(t)$; $t^2y''(t) + 3ty'(t) + 4y(t) = t\ln(t)$.

Exercice 66 On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(t) - \frac{1}{t}y(t) - (y(t))^2 = -9t^2.$$

1. Déterminer un réel a tel que $y(t) = at$ soit solution de (E) . On note y_0 cette solution.
2. Montrer que le changement de fonction inconnue $y(t) = y_0(t) - 1/z(t)$ transforme l'équation (E) en l'équation suivante.
$$(E') \qquad z'(t) + \left(6t + \frac{1}{t}\right) z(t) = 1$$
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E') , définies sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) , définies sur $]0, +\infty[$.

Exercice 67

1. Résoudre l'équation différentielle
$$ty''(t) - y'(t) - t^3y(t) = 0 ,$$
en posant $t = \sqrt{u}$.
2. Résoudre l'équation différentielle
$$y''(t) + \frac{2t}{1+t^2}y'(t) - \frac{1}{(1+t^2)^2}y(t) = 0 ,$$
en posant $t = \tan(u)$.
3. Résoudre l'équation différentielle
$$y(t)y'(t) + y^2(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} ,$$
en posant $z(t) = y^2(t)$.
4. Résoudre l'équation différentielle
$$y'(t) + 3y(t) + y^2(t) + 2 = 0 ,$$
en posant $z(t) = y(t) + 1$.
5. Résoudre l'équation différentielle
$$t^2y'(t) - y^2(t) + 2t^2 = 0 ,$$
en posant $y(t) = tz(t)$.
6. Résoudre l'équation différentielle
$$(3t + y(t))y'(t) = 3y(t) + t ,$$
en posant $y(t) = tz(t)$.
7. Résoudre l'équation différentielle
$$t^2y''(t) - 2ty'(t) + (2 - t^2)y(t) = 0 ,$$
en posant $y(t) = tz(t)$.

Table des matières