Chapitre 3 : séries numériques et séries de fonctions

1 Introduction

Les **suites** sont un des outils les plus puissants et les plus fréquemment utilisés en mathématiques. On en trouve déjà dans les mathématiques babyloniennes ou en Égypte, puis chez Archimède et Héron d'Alexandrie, avant un grand retour à partir du XVII$^{\text{ieme}}$ siècle. Il s'agit d'une famille d'éléments indexée par des nombres entiers naturels, qu'on note classiquement (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les suites les plus connues comprennent la suite de Fibonacci, celle de Lucas ou celle de Syracuse.

Le terme de **série** est quant à lui une extension de la notion de suite. On s'intéresse non plus aux termes de la suite, mais à la somme de ces termes.

2 Suites numériques

2.1 Définition

En mathématiques, une **suite** est donc une famille d'éléments — appelés ses ≪ termes ≫ — indexée par les entiers naturels. Une suite finie est une famille indexée par les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à un certain entier, ce dernier étant appelé ≪ longueur ≫ de la suite.

Lorsque tous les éléments d'une suite (infinie) appartiennent à un même ensemble E, cette suite peut être assimilée à une application de $\mathbb{N}$ dans E . On note classiquement une suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$, ou en abrégé : $(\mathbf{u_n})$.

En particulier, on parle de suite ≪ entière ≫, suite ≪ réelle ≫ et suite ≪ complexe ≫, quand E est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, respectivement.

2.2 Exemples

- *Suite arithmétique*
  C'est une suite définie par récurrence par :
  $$\begin{cases} & u_{n_0} = a \\ \forall n \geqslant n_0 & u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$
  où r est une constante appelée *raison* de la suite. Son terme général est alors :
  $$u_n = a + (n - n_0)r.$$
  Par exemple, si $a = 0$ et $r = 1$, la suite arithmétique a pour termes les entiers naturels. Si $a = 1$ et $r = 2$, la suite a pour termes les entiers naturels impairs.
- *Suite géométrique*
  C'est une suite définie par récurrence par :
  $$\begin{cases} & u_{n_0} = a \\ \forall n \geqslant n_0 & u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$
  où q est une constante appelée *raison* de la suite. Son terme général est alors :
  $$u_n = aq^{n-n_0}.$$
  Par exemple, si $a = 1$ et $q = 10$, la suite a pour termes les puissances de 10.

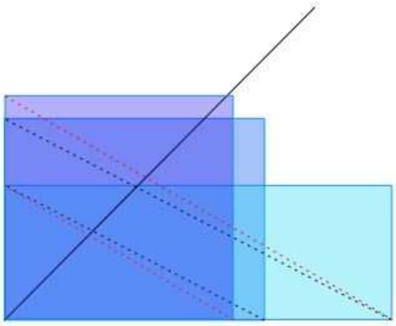
- *Quelques suites historiques célèbres*

1. *Suite d'Héron d'Alexandrie*
La méthode de Héron ou méthode babylonienne est une méthode efficace d'extraction de racine carrée, c'est-à-dire de résolution de l'équation $x^2 = a$, avec a positif. Elle porte le nom du mathématicien Héron d'Alexandrie du Ier siècle après Jésus-Christ, qui l'expose dans le tome I de son ouvrage Metrica (Les métriques), découvert seulement en 1896 mais certains calculs antérieurs, notamment égyptiens, semblent prouver que la méthode est plus ancienne.

Pour extraire la racine carrée de A, choisir une expression arbitraire x et prendre la moyenne entre x et $\frac{A}{x}$ et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent.

En notation moderne, cela définit la suite de nombres (u_n) telle que :

$$u_0 = x \quad \text{et, pour tout entier } n : u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right)$$



Il est intéressant de mettre en évidence le principe géométrique sous-jacent à la méthode. Chez les mathématiciens grecs, extraire la racine carrée de A revient à trouver un carré dont l'aire soit A. En prenant un rectangle de côté arbitraire x et de même aire, il est nécessaire que l'autre côté ait pour longueur A/x. Pour le rendre ≪ moins rectangle ≫ il suffit de considérer un nouveau rectangle dont la longueur est la moyenne arithmétique des deux côtés précédents soit $\dfrac{x + A/x}{2}$ et dont l'aire reste A.

En réitérant infiniment le processus, le rectangle se transforme petit à petit en un carré de même aire. Cette constatation est à la base de la méthode de Héron.

Si le premier terme de la suite $u_0 = x$ est choisi ≪ assez proche ≫ de $\sqrt{A}$, par exemple si c'est la partie entière de $\sqrt{A}$, la suite ainsi obtenue est une suite décroissante à partir du second terme, convergeant vers $\sqrt{a}$.
En effet, tout d'abord il est immédiat que, puisque $u_0 > 0$ et $A > 0$, alors $u_n > 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}^2 - A = \left(\frac{u_n^2+A}{2u_n}\right)^2 - A = \frac{u_n^4+A^2+2Au_n^2}{4u_n^2} - A = \frac{u_n^4+A^2-2Au_n^2}{4u_n^2} = \left(\frac{u_n^2-A}{2u_n}\right)^2 \geqslant 0,$$

ce qui implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geqslant \sqrt{a}.$$

Par ailleurs pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+A}{2u_n} - u_n = \frac{A-u_n^2}{2u_n},$$

or puisque $u_n \geqslant \sqrt{A}$, on a :

$$A - u_n^2 \leqslant 0$$

ce qui implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} \leqslant u_n..$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante positive donc elle converge vers une limite $l \geqslant 0$ qui vérifie $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{A}{l}\right)$, et donc $l = \sqrt{A}$.
Exemple : calcul de $\sqrt{2}$

Soit $u_0 = 1$, il vient successivement :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5,\\
u_2 &= \frac{3/2+4/3}{2} = \frac{17}{12} = 1{,}4166\ldots,\\
u_3 &= \frac{17/12+24/17}{2} = \frac{577}{408} = 1{,}4142156\ldots,\\
u_4 &= \frac{577/408+916/577}{2} = \frac{665857}{470832} = 1{,}4142135623745\ldots,\\
u_5 &= \frac{886731088897}{627013566048} = 1{,}4142135623730950488016896\ldots,
\end{aligned}$$

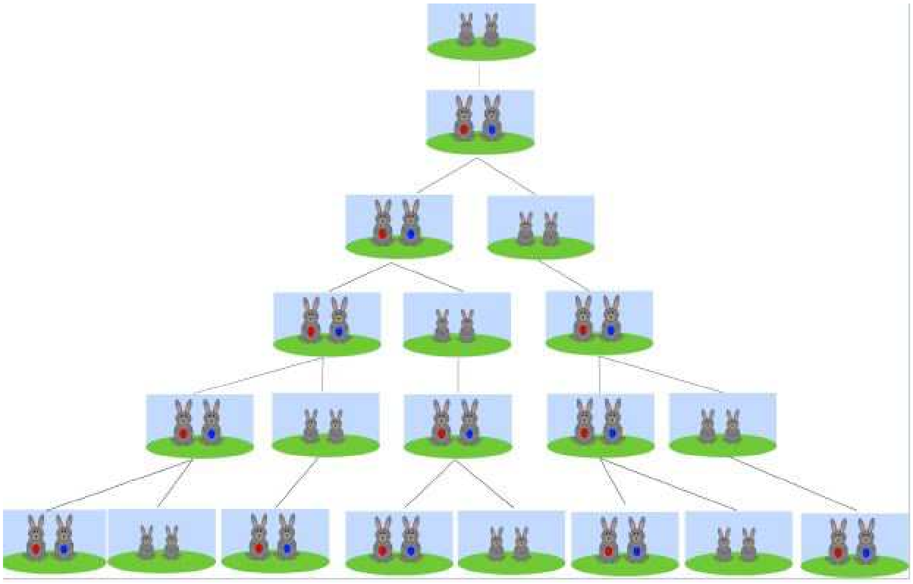
En comparant avec la valeur exacte $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887\cdots$, on constate bien la convergence très rapide (2 décimales exactes au deuxième calcul, 5 au troisième, 11 au quatrième, 23 au cinquième...). En seulement trois étapes, la précision relative sur la valeur de $\sqrt{2}$ est déjà de 10^{-6}, ce qui est excellent, et de moins de 10^{-12} en quatre étapes.
Généralisation à la racine $n^{ième}$ d'un nombre
Une méthode analogue existe pour extraire la racine n-ième d'un nombre A, il convient de considérer alors la suite de terme général :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_{k+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)u_k + \frac{A}{u_k^{n-1}}\right].$$

L'idée géométrique sous-jacente est la même, puisque déterminer la racine n-ième d'un nombre A consiste à trouver le côté d'un hypercube dont le ≪ volume ≫ est A. La suite considérée revient à partir d'un (hyper)parallélépipède à n dimensions dont $(n-1)$ côtés sont égaux, le dernier étant ajusté de façon à obtenir un volume égal à A.

2. *Suite de Fibonacci*
La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (parfois 1 et 1) et ses premiers termes sont : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.

Elle doit son nom à Leonardo Fibonacci qui, dans un problème récréatif posé dans l'ouvrage Liber abaci publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins : ≪ Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? ≫



Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n ième mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
- les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
- chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
- les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est croissante).

Notons $\mathcal{F}_n$ le nombre de couples de lapins au début du mois n. Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce qu'on note : $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 1$.

Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins ; on note alors $\mathcal{F}_3 = 2$.

Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois $n+2$: $\mathcal{F}_{n+2}$ désigne la somme des couples de lapins au mois $n+1$ et des couples nouvellement engendrés.

Or, n'engendrent au mois $n+2$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc, pour tout entier n strictement positif :

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$

On choisit alors de poser $\mathcal{F}_0 = 0$, de manière que cette équation soit encore vérifiée pour $n = 0$.

On obtient ainsi la forme récurrente de la suite de Fibonacci : chaque terme de cette suite est la somme des deux termes précédents ; pour obtenir chacun de ces deux termes, il faut faire la somme de leurs termes précédents et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces deux termes soient les deux termes initiaux, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_0$, qui sont connus.
Les termes de cette suite sont appelés nombres de Fibonacci :

$\mathcal{F}_0$	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_8$	$\mathcal{F}_9$	$\mathcal{F}_{10}$	$\mathcal{F}_{11}$	$\mathcal{F}_{12}$	$\mathcal{F}_{13}$	$\mathcal{F}_{14}$	$\mathcal{F}_{15}$	$\mathcal{F}_{16}$	$\mathcal{F}_{17}$	$\mathcal{F}_{18}$	$\mathcal{F}_{19}$	$\mathcal{F}_{20}$	$\mathcal{F}_{21}$	$\mathcal{F}_{22}$	$\mathcal{F}_{23}$	$\mathcal{F}_{24}$	$\mathcal{F}_{25}$	...	$\mathcal{F}_n$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	...	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

Cette suite est fortement liée au nombre d'or, φ. Ce nombre intervient dans l'expression du terme général de la suite. On montre en effet :

$$\boxed{\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n), \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi' = -\frac{1}{\varphi}.}$$

2.3 Limite finie de suite

Intuitivement, une suite possède une (valeur) limite si ses points se rapprochent toujours plus de cette limite lorsque l'indice augmente indéfiniment.

2.3.1 Définition

- *Suite réelle convergente*
  On dit qu'une suite réelle (u_n) **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N$:

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  On dit alors que (u_n) tend vers ℓ , et on le note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

- *Suite complexe convergente*
  La définition précédente s'applique dans $\mathbb{C}$ en remplaçant la valeur absolue par le module.

On dit alors que u_n est convergente et converge (ou tend) vers ℓ.

2.3.2 Exemples de suites réelles convergentes

- La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0 ; on note donc $u \to 0$..
- Si $|q| < 1$ alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $|q| < 1$ alors la suite $\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ (somme des termes de la suite géométrique de raison q) converge vers $\dfrac{1}{1-q}$.

On dit qu'une suite réelle **diverge** si elle ne converge pas. Une suite divergente peut soit avoir une limite infinie, soit n'avoir aucune limite. Examinons les deux possibilités.

2.4 Limite infinie de suite

2.4.1 Définition

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si pour tout réel A, $u_n > A$ à partir d'un certain rang. On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si pour tout réel A, $u_n < A$ à partir d'un certain rang. On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

2.4.2 Exemple

La suite arithmétique de terme général $u_n = n$ a pour limite $+\infty$.

2.5 Limites de suites n'existant pas

Certaines suites réelles ne tendent ni vers un réel, ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$. C'est le cas, par exemple des suites géométriques de raison inférieure ou égale à –1, comme :

- la suite non bornée (1, –2, 4, –8, 16, –32, . . .), géométrique de raison –2, ou même
- la suite bornée (1, –1, 1, –1, 1, –1, . . .), géométrique de raison –1 ;

3 Séries numériques

3.1 Définitions

Définition 3.1 *(Notion de série) :*

Soit une suite numérique infinie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$. *On appelle* **série numérique** *l'expression :*

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

et on note :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Les nombres $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ *sont les* **termes** *de la série. On peut appeler* u_n *le* **terme général** *de la série.*

Exemples :

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$
- Tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$ s'écrit de façon unique sous la forme (**développement décimal**) :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 10^{-n} = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \cdots$$

  avec $x_n \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ pour tout n. C'est le développement décimal de x et on écrit en général $x = 0, \overline{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \cdots}$. On convient en général que ce développement décimal ne finit pas par une infinité de 9, c'est-à-dire qu'on écrit $x = 0,37800000$ ou plus succinctement $x = 0,378$ plutôt que $x = 0,3779999999\cdots$.

Définition 3.2 *(Somme partielle d'une série) :*

La somme des n *premiers termes de la série :*

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_n$$

s'appelle la **somme partielle** *d'ordre* n *et est notée* S_n.

3.2 Convergence et divergence d'une série

Définition 3.3 *(Convergence d'une série) :*

Si la suite des sommes partielles admet une limite finie, c'estâ-dire si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ *existe et est finie, alors* S *s'appelle la* **somme** *de la série et on dit que la série* **converge** *vers* S*.*

S'il n'existe pas de nombre S *tel que* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ *on dit que la série* **diverge***.*

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ *ou* $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$*, on dit que la série diverge vers* $\pm\infty$ *et on écrit* $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \pm\infty$*.*

Exemples :

- $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge vers $+\infty$ de façon évidente.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ diverge car $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, etc. donc $\lim_{n\to\infty} S_n$ n'existe pas.
- Nous verrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge vers 2

3.3 Propriétés immédiates des séries

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Par conséquent,si une série converge, son terme général tend nécessairement vers zéro. Notons que la réciproque de cette propriété est fausse en général, c'est-à-dire que si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ peut ou non converger. Le fait que le terme général d'une série tende vers zéro est donc une condition nécessaire mais non suffisante de convergence. Par exemple, nous verrons que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ bien que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Si la condition nécessaire précédente, n'est pas remplie, on dit que la série est **grossièrement divergente** ; par exemple, la série $\sum (-1)^n$ est grossièrement divergente, bien que ses sommes partielles soient bornées.
- La multiplication de chaque terme d'une série par une constante non nulle n'affecte pas la convergence ou la divergence de la série.
- Enlever (ou rajouter) un nombre fini de termes à une série n'affecte pas la convergence ou la divergence de la série.

3.4 Séries particulières

3.4.1 Séries géométriques

Définition 3.4 *(Séries géométriques) :*
Les séries :

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$$

avec a *et* r *constantes convergent vers :*

$$S = \frac{a}{1-r} \quad si \quad |r| < 1 \tag{1}$$

et divergent si $|r| \geqslant 1$*.*

En effet :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$

donc :

$$rS_n = ar + a^2r + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n$$

Soustrayons membre à membre :

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

donc :

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

- Si $|r| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$ (car $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ si $|x| < 1$) ; la série converge alors vers $\frac{a}{1-r}$.
- Si $|r| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$ si $|x| > 1$) ; la série diverge donc vers ∞.
- Si $r = 1$, la série devient $a + a + a + ...$; on a donc $S_n = na$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; la série diverge donc vers ∞.
- Si $r = -1$, la série devient $a - a + a - a + ...$. La $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ n'existe pas et la série diverge.

Exemples :

- La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ converge vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ comme annoncé.
- La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n$ diverge car $3 > 1$.

3.4.2 Les $p-$séries

Définition 3.5 *($p-$séries) :*
*On appelle $p-$**séries** les séries du type :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ...$$

où p est une constante.

Ces séries convergent pour $p > 1$ et divergent pour $p \leqslant 1$.

Nous prouverons ceci plus tard avec le test de l'intégrale.

Par exemple, la $p-$série correspondant à $p = 1$, appelée **série harmonique**, est divergente. Vérifions le directement en calculant et en majorant les sommes partielles d'ordre 2^k de cette série. On a :

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{4}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{3}{2} \\
S_{16} &= = S_8 + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{8}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

En continuant de la même manière, on montre que $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$ quand $k > 1$. Ceci implique que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Notons que pourtant, on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3.5 Quelques propriétés calculatoires

- Si $c \neq 0$ la série $\sum cu_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. De plus, dans le cas de la convergence, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Les constantes non nulles peuvent donc « sortir » du signe de sommation.

- Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

La somme de la série dont le terme général est une somme de termes est égale à la somme des sommes de séries si ces séries convergent.

- Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(u_n - v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

La somme de la série dont le terme général est une différence de termes est égale à la différence des sommes de séries si ces séries convergent.

Par exemple, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

3.6 Séries à termes positifs, tests de convergence

Le plus souvent, la valeur exacte d'une série ne peut être obtenue. On se tourne alors vers la question de sa convergence ou de sa divergence. Les tests suivants aident à trancher cette question.

3.6.1 Le test de comparaison (pour les séries positives)

Théorème 3.6 *(Test de comparaison) :*

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries positives (c'est-à-dire telles que $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$) telles qu'à partir d'un certain entier positif m on ait $a_k \leqslant b_k$ $\forall k \geqslant m$, alors :

- *Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.*
- *Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.*

Remarque : on peut supposer $m = 1$ dans le théorème précédent, puisque la convergence n'est pas affectée par la suppression d'un nombre fini de termes.

Preuve
Supposons que $\sum b_n$ converge, soit $B_n = b_1 + \cdots + b_n$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle et $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la sére $\sum a_n$. Alors $A_n \leqslant B_n \quad \forall n$. Comme $\sum b_n$ est convergente, la suite de ses sommes partielles est bornée. Comme $A_n \leqslant B_n$, la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée. Par conséquent, cette suite converge et la série $\sum a_n$ converge également, ce ui termine la preuve.

Remarque :
Dans cette preuve, nous avons fait appel au résultat suivant :

Théorème 3.7
Une série à termes positifs $\sum s_n$ converge $\iff$ sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Preuve

$\Rightarrow$ Si $\sum s_n$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car toute suite convergente est bornée. En effet, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, posons $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$, prenons $\varepsilon = 1$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, on a $|S_n - L| < 1$. Donc, pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |S_n| &= |(S_n - L) + L| \\ &\leqslant |S_n - L| + |L| \\ &< 1 + |L| \end{aligned}$$

Prenons M comme étant le maximum de $1 + |L|$ et $|S_1|, |S_2|, \cdots, |S_{n_0}|$, alors $|S_n| \leqslant M \quad \forall n$. Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

$\Leftarrow$ Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (car s_n est à termes positifs), elle converge, car toute suite monotone bornée est convergente. Ce dernier point résulte de la propriété de la borné supérieure que possède $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, posons $l = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{S_n\}$. :

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } l - \varepsilon < S_{n_0} \leqslant l \quad \text{(par définition de la borne supérieure)}$$

donc :

$$\forall n \geqslant n_0, \text{ on a } l - \varepsilon < S_n \leqslant l$$

et la suite $(S_n)_{n\in Nn}$ est donc convergente vers l.

Exemples :

- Comme $\frac{1}{2^n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, alors $\sum \frac{1}{2^n+1}$ converge aussi.
- Comme $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge aussi.
- $\sum \frac{1}{n^2+5}$ converge car $\frac{1}{n^2+5} < \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (comme p-série avec $p = 2$).
- $\sum \frac{1}{3n+5}$ diverge car en posant $a_n = \frac{1}{4n}$ et $b_n = \frac{1}{3n+5}$ on a $a_n \leqslant b_n \forall n \geqslant 5$. En effet, $\frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{3n+5} \iff 3n + 5 \leqslant 4n \iff n \geqslant 5$ et $\sum a_n$ diverge.
- $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n}$ converge car $\frac{1}{n^n} \geqslant \frac{1}{2^n} \forall n \geqslant 2$ et $1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge puisque c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$.

3.6.2 Le test du quotient ou de comparaison à la limite (pour les séries positives)

Théorème 3.8 *(Test du quotient) :*

- *Si $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$ et $\neq$ de l'∞ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux (en d'autres mots, $\sum u_n$ converge $\iff \sum v_n$ converge).*
- *Si $A = 0$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $A = \infty$ et si $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.*

Preuve
Supposons que $\sum v_n$ converge ; soit c un nombre positif tel que $A < c$. Alors $\exists m > 0$ entier tel que $\frac{u_n}{v_n} < c \quad \forall n \geqslant m$. Donc $u_n < c v_n \quad \forall n \geqslant m$. Mais comme $\sum v_n$ converge, $\sum c v_n$ converge aussi. Par le test de comparaison (3.6), $\sum u_n$ converge aussi.

Réciproquement, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge aussi (en fait, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{A} > 0$ et on peut utiliser le même argument que précédemment.

Exemples :

- $\sum \frac{3n^2-5n+4}{7n^3+2}$ diverge car $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{3n^2-5n+4}{7n^3+2} \cdot \frac{n}{1}\right] = \frac{3}{7}$ et que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- $\sum \frac{5n-2}{\sqrt{n^6-4n^2+7}}$ converge car $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{5n-2}{\sqrt{n^6-4n^2+7}} \cdot \frac{n^2}{1}\right] = 5$ et que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

En utilisant ce test avec $v_n = \frac{1}{n^p}$ ($p-$série), on a le résultat suivant :

Corollaire 3.9
Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n n^p = A$*,* $\sum u_n$ *converge si* $p > 1$ *et* A *est fini et* $\sum u_n$ *diverge si* $p \leqslant 1$ *et* $a \neq 0$ *(*A *peut être égal à l'infini).*

Exemples :

- $\sum \frac{n}{4n^3-2}$ converge car $\lim\limits_{n\to\infty} n^2.\frac{n}{4n^3-2} = \frac{1}{4}$
- $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ diverge car $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}.\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = \infty$.

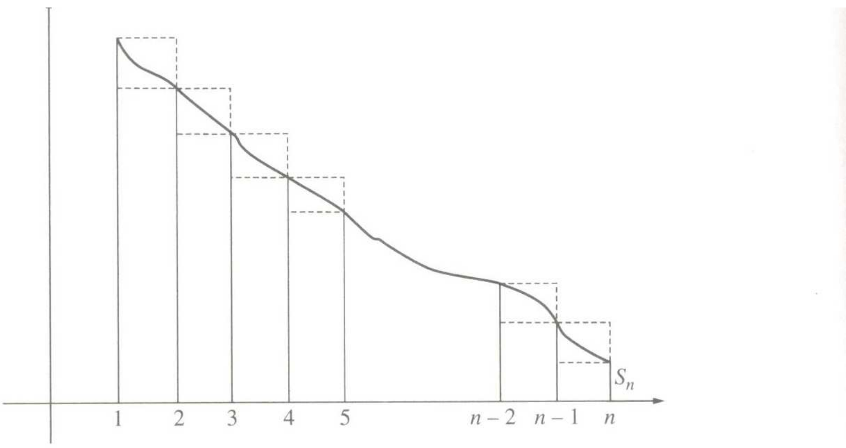
3.6.3 Le test de l'intégrale (pour les séries positives)

Théorème 3.10 *(Test de l'intégrale) :*

Si $\sum s_n$ *est une série positive et* $f(x)$ *une fonction continue, positive et décroissante sur* $[1, +\infty[$ *telle que* $f(n) = s_n \quad \forall n$ *alors :*

$$\sum s_n \text{ converge } \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Preuve



Sur la figure ci-dessus, on voit que :

$$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x < s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_{n-1} = S_n$$

(regarder les tirets supérieurs à $f(x)$*).*

Si $\sum s_n$ converge, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est donc bornée. Donc $\int_1^u f(x)\mathrm{d}x$ est bornée $\forall u \geqslant 1$ et $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge.

Réciproquement, sur la figure, on a :

$$s_2 + s_3 + \cdots + s_n < \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

(regarder les tirets inférieurs à $f(x)$*)*
et donc :

$$S_n < \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + s_1$$

Si $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge, alors $S_n < \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x + s_1$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée ; comme c'est une suite positive et croissante, elle est donc convergente et $\sum s_n$ converge.

Exemples :

- $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge car en posant $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x &= \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{u \to \infty} \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^u \\ &= \lim_{u \to \infty} \frac{1}{2} (\ln u)^2 = +\infty \end{aligned}$$

donc par le test de l'intégrale, $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car en posant $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x &= \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{u \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u \\ &= \lim_{u \to \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1 \right) = +1 \end{aligned}$$

donc par le test de l'intégrale, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Application : convergence et divergence des $p-$séries.
On a vu que les séries $\sum \frac{1}{n^p}$ avec p constant sont appelées $p-$séries. Montrons que :

- Si $p > 1$ les $p-$séries convergent.
- Si $p \leqslant 1$ les $p-$séries divergent.

Supposons $p \neq 1$ (on sait déjà que la série harmonique diverge).

On peut aussi supposer $p > 0$, car si $p \leqslant 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$ et la série diverge directement puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

Appliquons le test de l'intégrale avec $f(x) = \frac{1}{x^p}$ (qui est bien une fonction positive et décroissante sur $[1, +\infty[$). Comme on a :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x &= \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{u \to \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^u \\ &= \lim_{u \to \infty} \left[\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] \end{aligned}$$

- Si $p > 1$ alors $p - 1 > 0$ et $\lim\limits_{u \to \infty} u^{1-p} = \lim\limits_{u \to \infty} \frac{1}{u^{p-1}} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}$ et $\sum \frac{1}{n^p}$ converge.
- Si $p < 1$ alors $p - 1 < 0$ et $\lim\limits_{u \to \infty} u^{1-p} = +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = +\infty$ et $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge.

Remarque :
On peut traiter le cas de la série harmonique avec ce critère puisque si $p = 1$, $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim\limits_{u \to \infty} [\ln x]_1^u = +\infty$ et la série harmonique diverge donc bien.

3.7 Séries alternées

Une **série alternée** est une série dont les termes sont tour à tour positifs et négatifs, c'est-à-dire une série de la forme :

$$\sum (-1)^{n+1} a_n \quad = \quad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

où les a_n sont tous positifs.

Théorème 3.11 *(Théorème des séries alternées) :*
Soit $\sum(-1)^{n+1}a_n$ une série alternée. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ alors :

- *$\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge vers une somme A.*
- *Si A_n est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de cette série et si $R_n = A - A_n$ est l'erreur correspondante, alors $|R_n| < a_{n+1}$ (c'est-à-dire que l'erreur est plus petite en valeur absolue que le premier terme omis).*

Preuve

- Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $a_{2n+1} > a_{2n+2}$ et donc $a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$.
  Par conséquent :
  $$\begin{aligned} A_{2n+2} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \\ &= A_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > A_{2n} > 0 \end{aligned}$$
  Donc la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  D'autre part :
  $$A_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$
  donc $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

  La suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers une limite L.

  Maintenant $A_{2n+1} = A_{2n} + a_{2n+1}$ donc :
  $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} A_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \\ &= L + 0 = L \end{aligned}$$
  donc $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = L$ et $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge.

- On a pour le reste d'indice pair $2n$:
  $$\begin{aligned} R_{2n} &= (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \cdots > 0 \\ \text{et } R_{2n} &= a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) < a_{2n+1} - \cdots \end{aligned}$$
  donc $|R_{2n}| < a_{2n+1}$.

  Pour les restes d'indices impairs $2n+1$, on a :
  $$\begin{aligned} R_{2n+1} &= -(a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) - \cdots < 0 \\ \text{et } R_{2n+1} &= -a_{2n+2} + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + (a_{2n+5} - a_{2n+6}) + \cdots > -a_{2n+2} \end{aligned}$$
  donc $R_{2n+1} > a_{2n+2}$.

  On a donc $\forall k$ (pair ou impair) :
  $$|R_k| < a_{k+1}$$

Remarque :
La somme d'une série alternée est donc positive et comprise entre $a_1 - a_2$ et a_1.

En effet, $R_1 = A - A_1 = A - a_1 < 0$ et $|R_1| < a_2 \to |A - a_1| = -A + a_1 < a_2$ donc $A > a_1 - a_2$.

Exemple :
La **série harmonique alternée** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ est convergente et sa somme A est comprise entre $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et 1. Nous verrons plus loin que $A = \ln 2 \approx 0,693...$.

3.8 Convergence absolue et convergence conditionnelle d'une série

Définition 3.12 *(Convergence absolue et convergence conditionnelle) :*

Considérons une série $\sum s_n$.

- $\sum s_n$ *est dite absolument convergente* $\iff$ $\sum |s_n|$ *converge.*
- $\sum s_n$ *est dite conditionnellement convergente* $\iff$ *la série converge sans converger absolument.*

Exemple : la série $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ est conditionnellement convergente.

Nous admettrons sans preuve le théorème suivant :

Théorème 3.13 *(Théorème de réarrangement des termes) :*

- *Si* $\sum s_n$ *est absolument convergente, alors tout réarrangement de* $\sum s_n$ *(c'est-à-dire un changement de l'ordre dans lequel les termes arrivent) est convergent et a la même somme que la série* $\sum s_n$.
- *Si* $\sum s_n$ *est conditionnellement convergente,* $\forall c \in \mathbb{R}$ *fini ou infini, il y a un réarrangement des termes de* $\sum s_n$ *de somme* c *(la série peut donc converger vers n'importe quelle somme).*

Par exemple, illustrons le fait qu'une série conditionnellement convergente peut converger vers différentes sommes selon les réarrangements des termes.

La série :

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

converge en fait vers $\ln 2$ comme nous le verrons.
Appelons S la somme de cette série ; en prenant la moitié de chaque terme, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Ajoutons terme par terme cette série à la série précédente, dont la somme est S, c'est-à-dire :

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

On obtient :

$$\tfrac{3}{2}S = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} \cdots$$

c'est-à-dire une autre somme, alors qu'on a procédé à un simple réarrangement des termes.

Théorème 3.14 *(La convergence absolue implique la convergence simple) :*

Si une série converge absolument, elle converge simplement.

Preuve
On a :

$$0 \leqslant s_n + |s_n| \leqslant 2|s_n|$$

Comme $\sum |s_n|$ converge, $\sum 2|s_n|$ converge aussi. Par le test de comparaison (3.6), $\sum (s_n + |s_n|)$ converge. Donc :

$$\sum s_n = \sum ((s_n + |s_n|) - |s_n|)$$

converge également puisque la série d'une différence de séries convergentes converge vers la somme qui est la différence des sommes des séries.

Les critères suivants permettent d'étudier la convergence absolue de séries :

Théorème 3.15 *(Test du rapport ou critère de d'Alembert) :*

Soit $\sum s_n$ *une série,*

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r < 1$, *la série* $\sum s_n$ *converge absolument.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r > 1$ *(ou* $r = +\infty$*) la série* $\sum s_n$ *diverge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r = 1$, *on ne peut tirer aucune conclusion.*

Preuve

- Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r < 1$. Choisissons t tel que $r < t < 1$.
  Alors $\exists$ un entier positif m tel que si $n \geqslant m$, $\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| \leqslant t$.
  Donc :

$$|s_{m+1}| \leqslant t|s_m| \quad , \quad |s_{m+2}| \leqslant t|s_{m+1}| \leqslant t^2|s_m| \quad \cdots \quad |s_{m+k}| \leqslant t^k|s_m|$$

  Mais $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t^k|s_m|$ est une série géométrique convergente de raison $t < 1$. Donc, par le test de comparaison (3.6), $\sum |s_n|$ converge (puisqu'à partir de m, on a $|s_{m+k}| \leqslant t^k|s_m|$). Donc la série $\sum s_n$ est absolument convergente.

- Supposons $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r$ et $r > 1$ (ou $r = +\infty$). Choisissons t tel que $1 < t < r$. Alors $\exists$ un entier positif m tel que si $n \geqslant m$ $\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| \geqslant t$.
  Donc :

$$|s_{m+1}| \geqslant t|s_m| \quad , \quad |s_{m+2}| \geqslant t|s_{m+1}| \geqslant t^2|s_m| \quad \cdots \quad |s_{m+k}| \geqslant t^k|s_m|$$

  Mais $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t^k|s_m|$ est une série géométrique de raison $t > 1$ et donc divergente vers $+\infty$. Donc, par le test de comparaison (3.6), $\sum |s_n|$ diverge et comme le terme général $s_n \to \infty$, $\sum s_n$ diverge.

- Pour la série $\sum \frac{1}{n}$ par exemple, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to_infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

  et cette série diverge.
  Par contre, pour la série $\sum \frac{1}{n^2}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

  et cette série converge. On ne peut donc rien conclure quand $r = 1$.

Théorème 3.16 *(Test de la racine ou critère de Cauchy) :*

Soit $\sum s_n$ *une série,*

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|s_n|} = r < 1$, *la série* $\sum s_n$ *converge absolument.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|s_n|} = r > 1$, *(ou* $r = +\infty$*) la série* $\sum s_n$ *diverge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|s_n|} = r = 1$, *on ne peut tirer aucune conclusion.*

Preuve

- Supposons $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|s_n|} = r < 1$. Choisissons t tel que $r < t < 1$, alors $\exists$ un entier positif m tel que :

$$\sqrt[n]{|s_n|} \leqslant t \quad \forall n \geqslant m$$

Donc :

$$|s_n| \leqslant t^n \quad \forall n \geqslant m$$

Donc $\sum |s_n|$ converge par comparaison avec une série géométrique convergente et $\sum s_n$ est absolument convergente.

- Supposons $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r > 1$ (ou $r = +\infty$). Choisissons t tel que $1 < t < r$, alors $\exists$ un entier positif m tel que :

$$\sqrt[n]{|s_n|} \geqslant t \quad \forall n \geqslant m$$

Donc :

$$|s_n| \geqslant t^n \quad \forall n \geqslant m$$

Comme $\lim_{n\to\infty} t^n = +\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ et la série $\sum s_n$ diverge comme son terme général ne tend pas vers zéro.

- Considérons de nouveau les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$. Dans les deux cas, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = 1$$

et l'une diverge alors que l'autre converge.
Remarque :
On a :

$$\lim_{n\to\infty} n^{-n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$$

3.9 Exercices sur les séries numériques

Exercice 1
Utiliser le test du rapport pour étudier la convergence des séries suivantes :

- $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots$ *Rép. :* **converge**
- $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \ldots$ *Rép. :* **diverge**
- $1 + \frac{1.2}{1.3} + \frac{1.2.3}{1.3.5} + \frac{1.2.3.4}{1.3.5.7} + \ldots$ *Rép. :* **converge**
- $2 + \frac{3}{2}.\frac{1}{4} + \frac{4}{3}.\frac{1}{4^2} + \frac{5}{4}.\frac{1}{4^3} + \ldots$ *Rép. :* **converge**
- $\sum \frac{n3^n}{(n+1)!}$ *Rép. :* **converge**
- $\sum \frac{n^n}{n!}$ *Rép. :* **diverge**

Exercice 2
Etudier la convergence de la série suivante par le critère de d'Alembert et par le critère de comparaison.

$$1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \ldots$$

Rép. : **pas de conclusion par d'Alembert mais une comparaison avec** $\sum \frac{1}{n}$ **montre qu'elle diverge**

Exercice 3
Déterminer si les séries alternées suivantes sont absolument convergentes, conditionnellement convergentes ou divergentes.

1. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$
2. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$
3. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$
4. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{3n+1}$
5. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$
6. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$
7. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$
8. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
9. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2}$
10. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+2}$
11. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(n!)^2}$
12. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$
13. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^4+2}$
14. $\sum (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^4$
15. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^2-3}{n^2+n+2}$
16. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^n}$
17. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^{n+2}}$
18. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\cos \pi n}{n^2}$

1. *Rép. :* **abs. cgte**
2. *Rép. :* **cond. cgte**
3. *Rép. :* **dgte**
4. *Rép. :* **cond. cgte**
5. *Rép. :* **cond. cgte**
6. *Rép. :* **dgte**
7. *Rép. :* **abs. cgte**
8. *Rép. :* **cond. cgte**
9. *Rép. :* **abs. cgte**
10. *Rép. :* **abs.cgte**
11. *Rép. :* **abs. cgte**
12. *Rép. :* **cond. cgte**
13. *Rép. :* **abs. cgte**
14. *Rép. :* **abs. cgte**
15. *Rép. :* **dgte**
16. *Rép. :* **abs. cgte**
17. *Rép. :* **abs. cgte**
18. *Rép. :* **abs. cgte**

Exercice 4

- Combien de termes de $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ suffisent pour obtenir une approximation à $0,0005$ de la somme ? Trouver cette approximation.

  Rép. : $n = 6 \quad ; \quad \frac{91}{144} \approx 0,632$
- Idem pour $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$ à $0,001$.

  Rép. : $n = 3 \quad ; \quad 0,842$
- Idem pour $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ à $0,001$.

  Rép. : $n = 1000 \quad ; \quad 0,693$

Exercice 5
Déterminer la convergence éventuelle des séries :

- $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- $\sum \frac{(2sn)!}{n^4}$
- $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$
- $\sum \frac{3^n}{n!}$
- $\sum \frac{4^n}{(n+2)^n}$
- $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

- *Rép. :* **cgte**
- *Rép. :* **dgte**
- *Rép. :* **dgte**
- *Rép. :* **cgte**
- *Rép. :* **cgte**
- *Rép. :* **dgte**

3.10 Produit de deux séries

3.10.1 Définition du produit de deux séries

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries. La série produit $\sum w_n$ est définie par :

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0 = \sum_{i=0}^{n} u_iv_{n-i} \tag{2}$$

On l'appelle aussi **produit de Cauchy** ou produit de convolution des deux séries. Il faut bien sûr noter que le terme général w_n de la série produit n'est pas le simple produit terme à terme de u_n et v_n. Pour se souvenir de la définition de w_n, il suffit de penser au coefficient de X^n dans le produit de deux polynômes de coefficients u_n et v_n.

3.10.2 Convergence d'une série produit

Théorème 3.17 *(Convergence d'une série produit)*
Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est absolument convergente avec l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) \tag{3}$$

Remarque : ce résultat justifie l'appellation de ≪ série produit ≫.

3.11 Autres tests de convergence

Théorème 3.18 *(Test de Raabe) :*

Posons $L = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ *alors la série* $\sum u_n$ *:*

- *converge absolument si* $L > 1$
- *diverge ou converge conditionnellement si* $L < 1$

Si $L = 1$*, le test ne permet pas de conclure*

Théorème 3.19 *(Test de Gauss) :*

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^q}$ *où* $|c_n| < P \quad \forall n > \mathbb{N}$ *(c'est-à-dire si la suite* c_n *est bornée) alors la série* $\sum u_n$

- *converge absolument si* $L > 1$
- *diverge ou converge conditionnellement si* $L \leqslant 1$

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Suites de fonctions

4.1.1 Suite de fonctions, définition

Une **suite de fonctions** est une suite (f_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (qui désigne l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle), c'est-à-dire qu'elle associe à chaque entier naturel n la fonction f_n :

$$(f_n) : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ n & \mapsto & f_n \end{array}$$

Exemple :
Voici la représentation graphique pour quelques valeurs de n de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n(x) = \sin^n x \ \forall n \in \mathbb{N}$$

sur l'intervalle $[0; \pi]$.

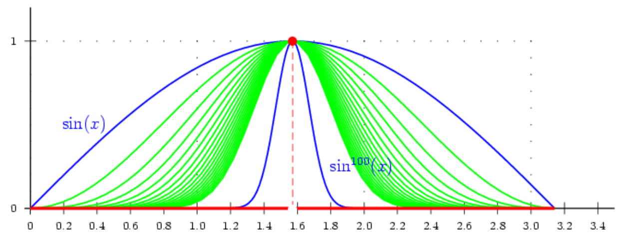


FIGURE 1 – Suite de fonctions $f_n(x) = \sin^n x \ \forall n \in \mathbb{N}$

4.1.2 Convergence simple des suites de fonctions

Soit $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$. La suite est dite **convergente** vers $F(x)$ ou est dite avoir pour limite $F(x)$ sur $[a, b]$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall x \in [a, b] \text{ on peut trouver } N > 0 \text{ tel que } \forall n > N, \qquad |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

Le nombre N peut dépendre à la fois de x et de ε. S'il dépend uniquement de ε (et pas de x), la suite est dite **uniformément convergente** vers $F(x)$ sur $[a, b]$.

Exemples :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$f_n = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{x}{n} \end{array} \right.$$

On voit que pour tout réel x, $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$, c'est-à-dire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (cf. figure 2 à gauche).

2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$f_n = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to (1 + \frac{x}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})^n} \end{array} \right.$$

Comme au voisinage de 0, on a : $\ln(1 + u) \simeq u$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+\frac{x}{n})^n} = e^x$$

c'est-à-dire que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction exponentielle (cf. figure 2 à droite).

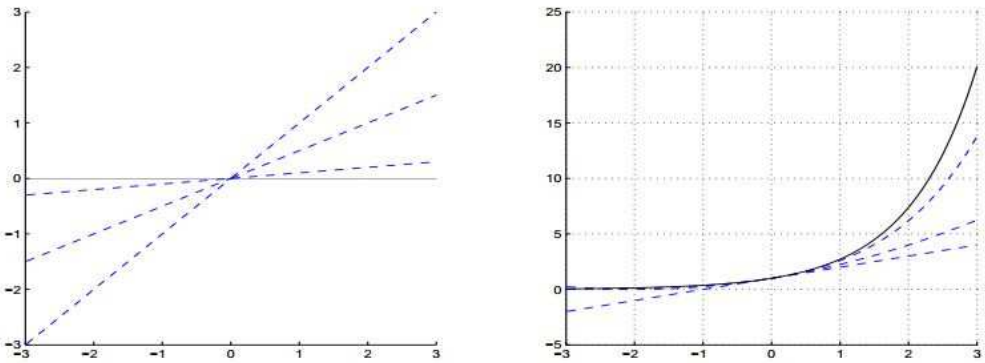


FIGURE 2 – Fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite simple f

Remarque : la convergence simple est souvent facile à établir, mais elle ne conserve pas certaines propriétés des fonctions (continuité, aspect borné, intégrabilité), comme le montrent les exemples suivants.

Exemples : :

1. Continuité

$$f_n = \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^n \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction :

$$f : x \to \begin{cases} 0 & \text{si} & x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} & x = 1 \end{cases}$$

Ainsi les f_n sont toutes contines sur $[0,1]$ mais f ne l'est pas (cf. figure 3 à gauche).

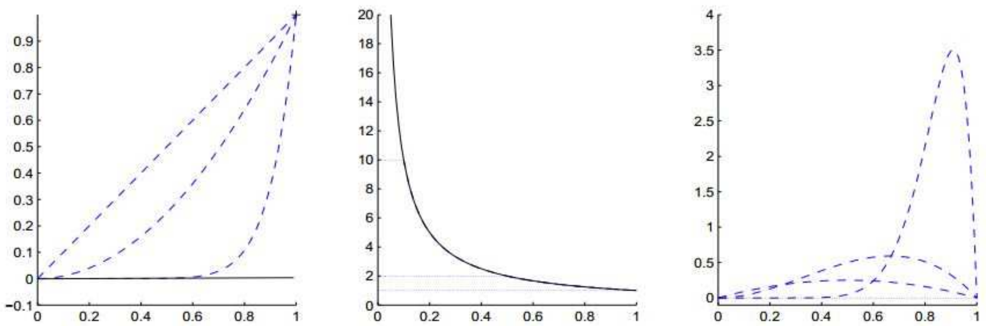


FIGURE 3 – Fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite simple f

2. Aspect borné

$$f_n = \begin{cases}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \begin{cases} n & \text{si} & 0 < x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si} & \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction :

$$f : x \to \begin{cases}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{1}{x} \end{cases}$$

Bilan : chacune des fonctions f_n est bornée sur $]0,1]$ mais f ne l'est pas (cf. figure 3 au centre).

3. Intégration

$$f_n = \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & n^2x^n(1-x) \end{cases}$$

On vérifie aisément que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ (figure 3) à droite), dont l'intégrale sur ce segement vaut 0. Pourtant :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1 \neq 0$$

Ainsi la convergence simple ne conserve pas les propriétés des fonctions : ceci justifie la définition d'une nouvelle forme de convergence, plus difficile à vérifier, mais valide pour les passages à la limite.

4.1.3 Convergence uniforme des suites de fonctions

On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Remarques :

- La convergence uniforme signifie que pour n assez grand, on est assuré d'être dans un tube de rayon ε autour de f (cf. figure 4).
- Si on compare les définitions avec quantificateurs logiques des convergences simple et uniforme, on voit que la seule différence se situe dans la position de la variable x. Dans le premier cas, le n_0 dépend de ε et de x, tandis que dans le second il ne dépend que de ε. Penser à la différence entre continuité et uniforme continuité d'une fonction. En particulier, la convergence uniforme est plus forte que la convergence simple.

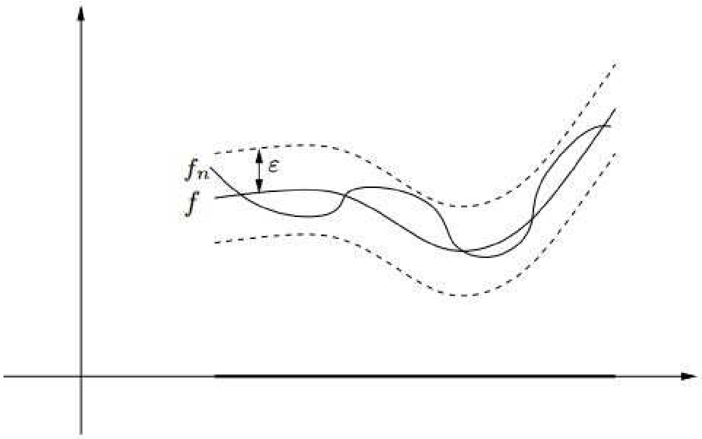


FIGURE 4 – Convergence uniforme vers f

Sur la figure 1, la limite simple (en rouge) des fonctions continues (en vert) $f_n(x) = \sin n(x)$ est discontinue donc la convergence n'est pas uniforme.

La convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une forme de convergence plus exigente que la convergence simple. La convergence devient uniforme quand toutes les suites $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ avancent vers leur limite respective avec une sorte de « mouvement d'ensemble ».

Dans le cas de fonctions numériques d'une variable, la notion prend une forme d'« évidence » géométrique : le graphe de la fonction f_n se « rapproche » de celui de la limite (cf. figure 5).

Si l'on trace les courbes représentatives des fonctions $f+\varepsilon$ et $f-\varepsilon$, dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f revient à dire qu'à partir d'un certain rang la courbe de f_n est comprise entre les deux autres.

Proposition 4.1 *(La convergence uniforme implique la convergence simple)*
Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f, alors elle converge simplement ver f ;

Méthode :
Pour étudier la convergence d'une suite de fonctions (f_n), on commence par la convergence simple : à x fixé, touver la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in Nn}$. Si cette limite existe pour tout x, notons la $f(x)$, il y a convergence simple vers la fonction f. Il faut alors étudier la suite (M_n) définie par $M_n = \sup\limits_{x\in I} |f(x) - f_n(x)|$. La détermination de M_n peut passer par l'étude des variations de f_n. Si (M_n) tend vers zéro, la convergence est uniforme, sinon

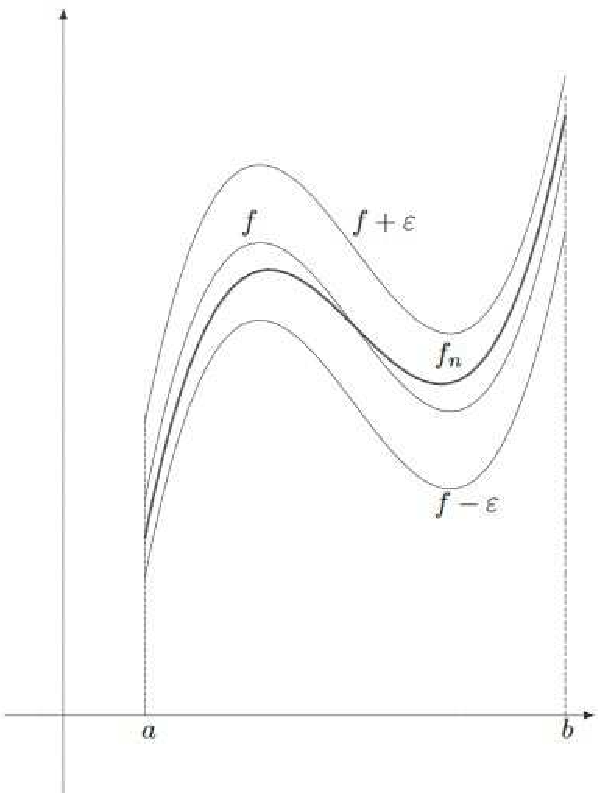


FIGURE 5 – Convergence uniforme vers f

elle ne l'est pas.

Exemples :

1. Convergence uniforme

$$f_n = \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^n(1-x) \end{array} \right.$$

Il est clair que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Pour déterminer :

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|,$$

on étudie les variations de f_n :

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x),$$

donc f_n est croissante de 0 à $\frac{n}{n+1}$ et décroissante ensuite. Elle admet son maximum au point $\frac{n}{n+1}$, c'est-à-dire :

$$0 \leqslant M_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \leqslant 1 - \frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ (cf. figure 6 à gauche).

2. Convergence simple, non uniforme

$$f_n = \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & nx^n(1-x) \end{array} \right.$$

A nouveau, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Mais on a cette fois :

$$M_n = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$

Il y a convergence simple, mais non uniforme, de la suite (f_n) vers la fonction nulle (cf. figure 6 à droite)

Contrairement à la convergence simple, la convergence uniforme conserve les bonnes propriétés des fonctions. C'est ce que nous allons montrer dans la suite de ce paragraphe.

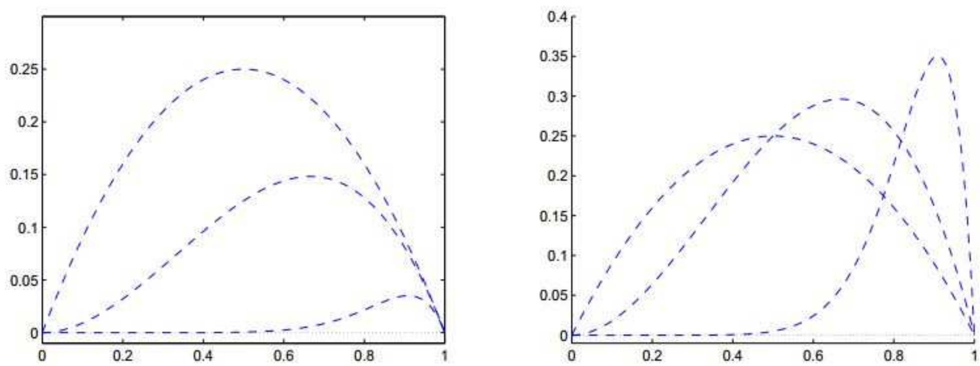


FIGURE 6 – Fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite f

Proposition 4.2 *(f_n bornées $\implies$ f bornée) :*
Si les fonctions f_n sont bornées sur I et convergent uniformément vers f, alors f est bornée

Preuve de la proposition 4.2
Dans la définition de la convergene uniforme, prenons $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant n_0,\, \forall x \in I \qquad |f(x) - f_n(x)| < 1.$$

Or, f_{n_0} est bornée par hypothèse, disons par M, donc en applquant l'inégalité triangulaire, on a pour tout x de I :

$$|f(x) \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leqslant M + 1$$

c'est-à-dire que f est fornée par $M + 1$.

Proposition 4.3 *(f_n continues $\implies$ f continue) :*
Si les fonctions f_n sont continues sur I et convergent uniformément vers f, alors f est continue

Preuve de la proposition 4.3
$\forall \varepsilon > 0$ et $x_0 \in I$ fixés. Par convergence uniforme des f_n, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant n_0,\, \forall x \in I \qquad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

et par continuité de f_{n_0} en x_0 :

$$\exists \delta > 0,\, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon.$$

D'où par inégalité triangulaire :

$$\forall x \in I,\, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + [f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leqslant 3\varepsilon.$$

c'est-à-dire que f est continue en x_0. Le point x_0 étant arbitraire, f est continue sur I.

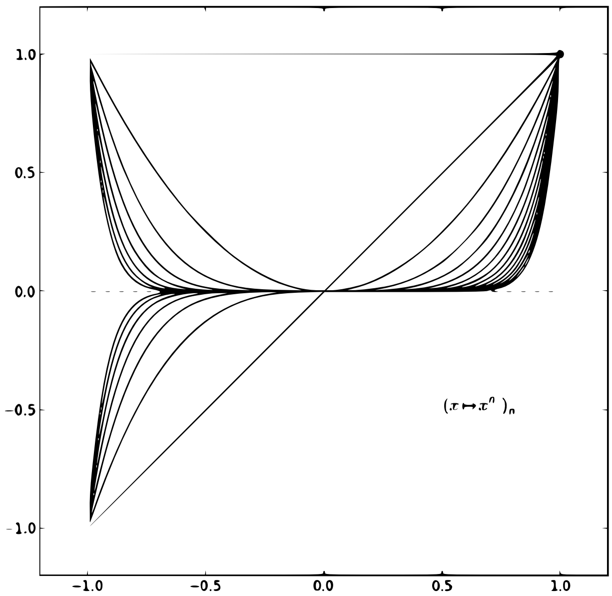
Remarques :

- Ce résultat est souvent utilse sous forme contraposée : si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction non continue, la convergence n'est pas uniforme : **une fonction discontinue ne peut pas être limite uniforme de fonctions continues** (cf. l'exemple étudié précédemment $x \to x^n$ sur $[0, 1]$.)

  Exemple
  On considère la suite de fonctions puissances $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite de fonctions converge simplement sur $]-1, 1]$ vers la fonction f définie par

  $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

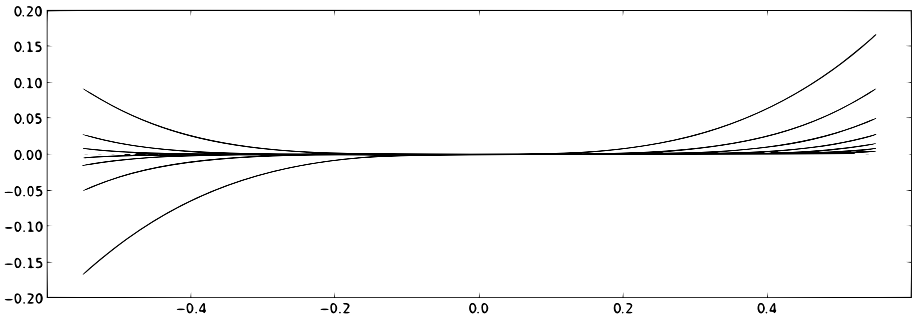
  Puisque les fonctions de la suite sont continues et que la limite simple f n'est pas continue (en 1), la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1]$. Par densité, elle ne l'est donc pas non plus sur $]-1, 1[$.



Par contre, la convergence est uniforme sur tout segment $[-a, a]$ avec $0 \leqslant a < 1$ puisque :

$$\|x \mapsto x^n\|_{\infty,[-a,a]} = a^n$$

qui converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La figure ci-dessous montre que la convergence sur $[-1/2, 1/2]$ de la suite des fonctions puissances est uniforme.



- On peut voir ce résultat comme une interversion de limites, puisque l'on a montré que :

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x_0) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

- On montre de même que si les f_n sont uniformément continues et convergent uniformément vers f, alors f est uniformémet continue.

Pour l'intégrabilité, on doit prendre quelques précautions quant à l'intervalle d'intégration.

Proposition 4.4 *(Intégrabilité)*
si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ves f sur l'intervalle borné I, avec f_n intégrable pour tout n, alors f est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x$$

Preuve de la proposition 4.4
Pour simplifier, on suppose les f_n continues, ce qui sera généralement e cas, et que l'intervalle $I = [a, b]$ est fermé (c'est-à-dire que l'on ne démontre pas le résultat pour les intégrales généralisées). Puisqu'il y a convergence uniforme, f est elle aussi continue, donc intégrable. Soit comme d'habitude $\varepsilon > 0$ fixé, alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in I \qquad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

On intègre membre à membre pour en déduire que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon(b - a)$$

et puisque :

$$\left| \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\mathrm{d}x$$

on en déduit que :

$$\left|\int_a^b |f_n(x)|\mathrm{d}x - \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon(b-a)$$

quantité arbitrairement petite, donc on a bien :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n_t o\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Remarques :

- En bref, on a passé la limite sous le signe somme :

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

- Ce résultat s'applique typiquement lorsque les f_n sont continues sur $[a,b]$ mais n'exclut nullement les intégrales généralisées, pous peu que l'intervalle soit borné (c'est-à-dire de la forme $]a,b]$, $[a,b[$, ou $]a,b[$). Si I est de longueur infinie, l'interversion de la limite et de l'int"gration peut ne pas fonctionner.

Proposition 4.5 *(Dérivabilité)*
si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ves f sur l'intervalle borné I, avec f_n de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, et si (f_n') converge uniformément vers g, alors (f_n) converge uniformément vers f, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Preuve de la proposition 4.5
Prenons x dans l'intervalle I, alors il existe a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $[a,b] \subset I$. La suite des fonctions (f_n) converge uniformément vers g donc g est continue, donc admet des primitives. En particulier, celle qui coïncide avec f en a s'écrit :

$$G(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

De la même façon, on peut écrire pour tout n :

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'(t)(t)\mathrm{d}t$$

mais alors :

$$|G(x) - f_n(x)| = \left|f(a) - f_n(a) + \int_a^x (g(t) - f_n'(t))\, t\right|$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque (f_n) converge simplement vers f :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0 \qquad |f(a) - f_n(a)| < \varepsilon$$

Puisque (f_n') converge uniformément vers g :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_1\ \forall t \in [a,b] \qquad |g(t) - f_n'(t)| < \varepsilon$$

Mais alors pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a :

$$|G(x) - f_n(t)| \leqslant (x-a+1)\varepsilon \leqslant (b-a+1)\varepsilon$$

Puisque ε est arbitraire, ceci montre que (f_n) converge uniformément vers G, qui est donc égale à f, et par suite f est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $f' = g$.

Remarques :

1. La preuve montre que l'on peut remplacer l'hypothèse de convergence simple des f_n vers f sur I par la convergence e un seul point :

$$\exists x_0 \in I,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

2. Il importe de noter que la convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'implique pas la convergence de la suite des fonctions dérivées : sur $\mathbb{R}$, prenons $f_n : x \to \frac{1}{n}\sin x$. Il est clair que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Pourtant, si on dérive, on obtient $f_n' : x \to \cos nx$. Or la suite numérique $(\cos nx)$ n'admet de limite que pour x congru à 0 modulo 2π. La suite (f_n') ne converge donc même pas simplement (cf. figure 7).

3. Notons aussi que la convergence uniforme d'une suite de fonctions n'implique pas la dérivabilité de la fonction limite. Sur $\mathbb{R}$, les fonctions (f_n) définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ sont dérivables en tout point. Pourtant, elles convergent uniformément vers la fonction valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0 (voir figure 8). Le premier exemple de fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$, mais dérivable nulle part, était d'ailleurs construit à partir d'une suite de fonctions dérivables uniformément convergentes. Il a été donné par le mathématicien allemand Weierstrass en 1870.

Comme d'habitude, quand on ne dispose pas d'une forme explicite de la fonction limite, le critère de Cauchy est incontournable :

Proposition 4.6 *(Critère de Cauchy uniforme)*
Une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I si elles vérifie le critère de Cauchy uniforme par rapport à x :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in I\ :\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

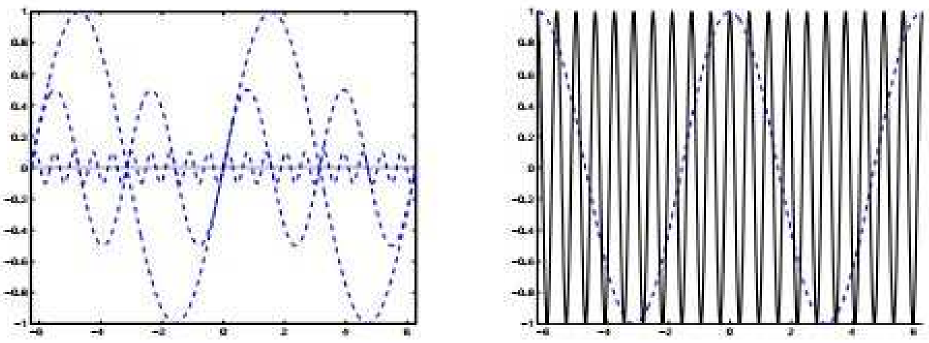


FIGURE 7 – A gauche, fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite f. A droite, fonctions f'_1, et f'_{10}

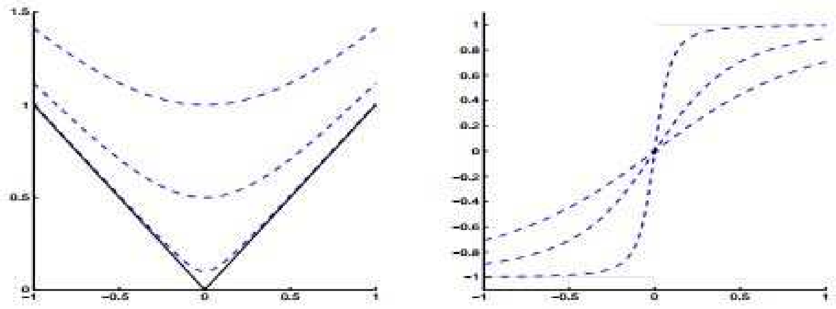


FIGURE 8 – A gauche, fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite f. A droite, fonctions f'_1, f'_2, f'_{10} et la limite g

4.2 Séries de fonctions

4.2.1 Séries de fonctions, définition

Une série de fonctions est une série dont les termes sont des fonctions toutes définies sur un ensemble X, et à valeurs réelles ou complexes, ou plus généralement vectorielles.

Plus particulièrement, une **série de fonctions** est une série $\sum f_n(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des fonctions d'une variable réelle), c'est-à-dire qu'elle associe à chaque entier naturel n la fonction $S_n(x)$:

$$(S_N) : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ N & \mapsto & S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n(x) \end{array}$$

où on a définit $\forall N \in \mathbb{N}$ la quantité $(S_N)(x)$ qui est la $\mathrm{N}^{\text{ième}}$ sommes partielles de la série.

On s'intéresse en fait dans cette section à la convergence de la suite des sommes partielles, c'est-à-dire la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

4.2.2 Convergence simple des séries de fonctions

La série de fonctions :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

est dite **convergente** sur $[a, b]$ si la suite des sommes partielles $(S_N(x))_{N\in\mathbb{N}}$ où $S_N(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x)$ est convergente simplement vers $S(x)$ sur $[a, b]$. Dans ce cas on écrit $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(x) = S(x)$ et on appelle

$S(x)$ la **fonction somme** de la série.

Il en résulte que :

$$\sum f_n(x) \text{ converge vers } S(x) \text{ sur } [a,b] \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall x \in [a,b] \text{ on peut trouver } N_0 > 0 \text{ tel que}$$
$$|S_N(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall N > N_0.$$

Exemple :
Si $I =]-1,1[$ et $f_n(x) = x^n$, alors :

$$S_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

et la série $\sum f_n$ est convergente (cf. figure 9) de somme :

$$S : \left\{ \begin{array}{ll}]-1,1[& \to \mathbb{R} \\ x & \to \frac{1}{1-x} \end{array} \right.$$

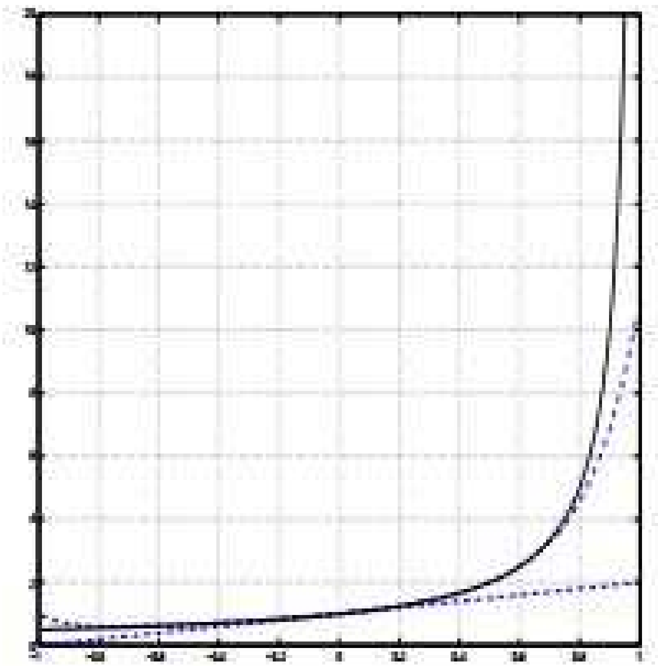


FIGURE 9 – Fonctions $S_0 = f_0$, $S_1 = f_0 + f_1$, $S_{10} = f_0 + \cdots = f_{10}$ et la limite S

Si N dépend seulement de ε (et pas de x) la série est appelée **uniformément convergente** sur $[a,b]$. De façon équivalente, si on pose $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$, la série $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ dépendant de ε (mais pas de x) tel que $|R_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N$ et $\forall x \in [a,b]$

4.2.3 Convergence absolue d'une série de fonctions

Définition 4.7 *(Convergence absolue)*

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement.

Exemple : la règle de d'Alembert permet de montrer que la série de fonctions $\sum \frac{x^N}{n!}$ converge absolument sur $\mathbb{R}$. Sa somme est la fonction exponentielle.

On retrouve bien sûr pour les séries de fonctions le résultat vu pour les séries numériques.

Proposition 4.8 *(Convergence absolue $\Longrightarrow$ convergence simple*
Si la série de fonctions $\sum f_n$ est absolument convergente sur I, alors ele est simplement convergente sur I.

Preuve de la proposition 4.8
Pour tout x de I, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ est convergente, donc la série $\sum f_n(x)$ aussi. C'est exactement dire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

Exemples : la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$ converge simplement sur tout $\mathbb{R}$ (le vérifier grâce au critère des séries alternées), mais ne converge absolument en aucun point de $\mathbb{R}$ (le vérifier grâce à un équivalent), cf. figure 10.

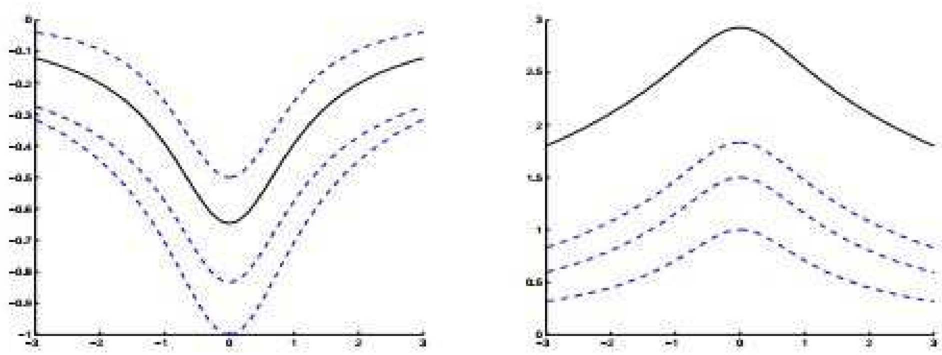


FIGURE 10 – Sommes partielles S_1, S_2, S_3 (pointillés) et S_{10} (traits pleins) associés respectivement à $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$ et à $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}$

4.2.4 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 4.9 *(Convergence uniforme)*

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur I si la suite des sommes partielles (S_N) converge uniformément vers S sur I. Ceci revient à dire que la suite (r_N) des restes converge uniformément vers zéro :

$$\sup_{x\in I} |S(x) - S_N(x)| = \sup_{x\in I} |r_N(x)| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exemple : Soit $\alpha \in]0,1[$. La série $\sum x^n$ converge uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$. En effet :

$$\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} |r_N(x)| = \sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} \left| \frac{\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \right| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque : *(Convergence uniforme non absolue)*
On considère les fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ constantes sur $\mathbb{R}$, avec $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. Par le critère des séries alternées, $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est uniformément convergente. Par contre, elle n'est pas absolument convergente (divergence de la série harmonique).

Pour une série de fonctions uniformément convergente, on peut appliquer les résultats de la section précédente sur les suites de fonctions :

Théorème 4.10 *(Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes)*
Soit f_n une série de fonctions qui converge uniformément vers S sur l'intervalle I, alors :

1. *$\sum f_n$ converge simplement vers S sur I ;*
2. *Si les f_n sont bornés sur I, S est bornée sur I ;*
3. *Si les f_n sont continues sur I, S est continue sur I ;*
4. *Si les f_n sont intégrables sur l'intervalle bornée I, S est intégrable sur I avec :*

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x$$

5. *Si les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I, si $\sum f_n$ converge simplement vers S et si $\sum f_n'$ converge uniformément vers σ, alors $\sum f_n$ converge uniformément vers S, S est dérivable et $S' = \sigma$. Autrement dit :*

$$\forall x \in I \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \right)'$$

6. *Critère de Cauchy uniforme*
$\sum f_n$ converge uniformément vers S sur l'intervalle I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists N_O \in \mathbb{N},\, \forall N \geqslant N_0,\, \forall p \in \mathbb{N},\, \forall x \in I \,:\, [S_{N+p}(x) - S_N(x)| \leqslant \varepsilon$$

Remarque : *Convergence absolue non uniforme*
Soit la suite :

$$f_n = \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^n - x^(n+1) \end{array} \right.$$

On a clairement $S_N(x) = 1 - x^{N+1}$, donc convergence simple sur $[0,1]$ vers la fonction :

$$S : x \to \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si} & x = 1 \end{array} \right.$$

Les f_n sont continues et S ne l'est pas, donc il n'y a pas convergence uniforme. Par contre, puisque les f_n sont positives, on a pour tout x de $[0,1]$:

$$\sum_{n=0}^{N} |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{N} f_n(x) = S_N(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} S(x)$$

c'est-à-dire convergence absolue.

Pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on montre en général la convergence uniforme des restes vers zéro. Encore faut-il disposer d'une expression manipulable pour ces restes... Heureusement, la notion de convergence normale et le test M de Weierstrass permettent de montrer la convergence uniforme.

4.2.5 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 4.11 *(Convergence normale)*

La **convergence normale** *est l'un des modes de convergence d'une série de fonctions. Si (f_n) est une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un même ensemble X, la série de terme général f_n converge normalement sur X s'il existe une suite de réels a_n tels que :*

- *pour tout n, $|f_n|$ est majorée par a_n sur X ;*
- *la série de terme général a_n converge.*

Exemples :

- La série $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. En effet, $\frac{|sin(nx)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.
- La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2+x^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. En effet, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.

Remarque :
Si la série (f_n) converge normalement, elle converge en particulier absolument pour tout x de I. En fait, la convergence normale implique toutes les autres convergences.

Théorème 4.12 *(Convergence normale $\Longrightarrow$ autres convergences)*
Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$. Si (f_n) est normalement convergente sur I, alors (f_n) est simplement, absolument et uniformément convergente sur I .

Preuve
Soit (f_n) une série de fonctions normalement convergente : il existe donc une série numérique à termes positifs $(\sum a_n)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leqslant a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.
Alors il est clair que $\forall x \in I$, $\sum |f_n(x)|$ converge, donc la série $\sum f_n$ est absolument convergente, donc simplement convergente.
Passons à la convergence uniforme. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $(\sum a_n)$ est convergente, elle satisfait le critère de Cauchy.
Donc $\exists N \in \mathbb{N} | N \leqslant n < p \Rightarrow a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p < \varepsilon$.
Soient alors $n, p \in \mathbb{N}$ vérifiant $N \leqslant n < p$ et soit $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + \cdots + f_p(x)| &\leqslant |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_p(x)| \\ &\leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc la série $(\sum f_n)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, et elle converge uniformément sur I .

La convergence normale d'une telle série implique donc sa convergence uniforme. Par conséquent, tous les résultats qui concernent la convergence uniforme sont aussi valables pour la convergence normale. En particulier, si l'ensemble X est muni d'une topologie :

Théorème 4.13 *La somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement est une fonction continue.*

La convergence normale d'une série impliquant également sa convergence absolue en tout point, a fortiori, la convergence normale d'une série implique sa convergence simple, autrement dit la convergence de la série en tout point.
Les implications réciproques sont fausses.

Remarque. Quel est l'avantage de la convergence normale sur la convergence uniforme ? Il est double : d'une, elle est très simple à vérifier puisqu'il suffit de trouver une bonne série numérique $\sum a_n$; de deux, elle ne nécessite pas de connaître la fonction limite (tout comme Cauchy uniforme).

Exemple : *Convergence uniforme non normale*
Soit la suite :

$$f_n = \begin{cases} [0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \to \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}} \end{cases}$$

A x fixé, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge par le critère des séries alternées, donc la série de fonctions converge simplement. De plus, pour tout x, la majoration du reste par son premier terme donne :

$$|r_N(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

et la convergence des restes vers zéro est uniforme en x, c'est-à-dire que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, elle n'est pas absolument convergente : à x fixé, la série $\sum |f_n(x)|$ est équivalente à la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. A fortiori, elle n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$ (cf. figure 11).

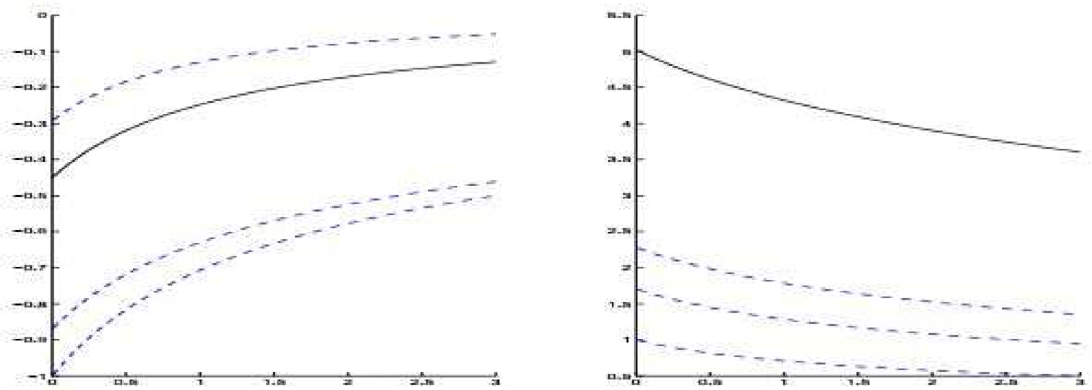


FIGURE 11 – Sommes partielles S_1, S_2, S_3 (pointillés) et S_{10} (traits pleins) associés respectivement à $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ et à $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n+x}}$

Remarque. Au total, le schéma de la figure 12 résume les implications entre les différents types de convergence pour les séries de fonctions.

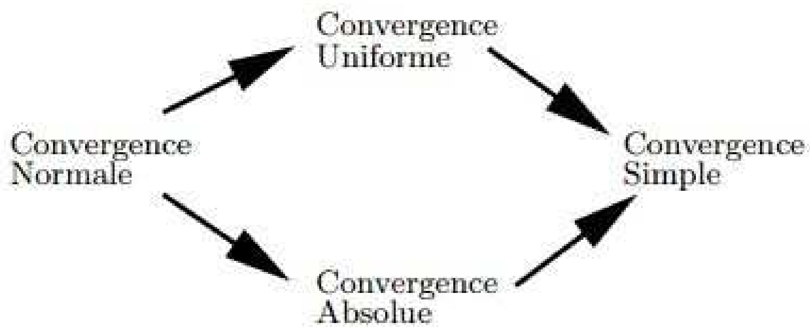


FIGURE 12 – Liens entre convergences pour les séries de fonctions.

5 Séries entières ou séries de puissances entières

5.1 Définition

Définition 5.1 *(Série entière)*

Une **série entière** *est une série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$

où les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *forment une suite réelle ou complexe. La série est dite* **entière** *du fait qu'elle fait intervenir des puissances entières.*

5.2 Rayon de convergence d'une série entière

Les séries entières possèdent des propriétés de convergence remarquables, qui s'expriment pour la plupart à l'aide d'une grandeur associée à la série, son **rayon de convergence** R. Par exemple, sur le disque de convergence (disque ouvert de centre 0 et de rayon R), la fonction somme de la série peut être dérivée indéfiniment terme à terme.
Cette quantité est définie comme suit :

$$R = \sup\left\{|z|, z\in\mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge } \right\} \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$$

L'existence de cette grandeur repose sur le lemme suivant, dû à Abel, mais qu'il ne faut pas confondre avec le théorème d'Abel, lequel est utilisé pour démontrer la continuité de la somme de la série à la frontière du disque de convergence.

Lemme 5.2 *(Lemme d'Abel) :*
Supposons qu'il existe un réel r_0 tel que la suite de terme général $(a_n r_0^n)$ soit bornée, alors :

- *la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge absolument pour $|z| < |r_0|$.*
- *la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge normalement pour $|z| < r$ pour tout $0 < r < |r_0|$.*

Preuve
La suite $(a_n r_0^n)$ étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n r_0^n| \leqslant M$.

- Pour $|z| < |r_0$:

$$|a_n z^n| = \left|\frac{a_n r_0^n z^n}{r_0^n}\right| = |a_n r_0^n| \left|\frac{z}{r_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{r_0}\right|^n.$$

  La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{r_0}\right|^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{z}{r_0}\right| < 1$ donc convergente. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ est convergente et par conséquent, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < |r_0|$.

- Soit $0 < r < |r_0|$ et soit $|z| \leqslant r$.

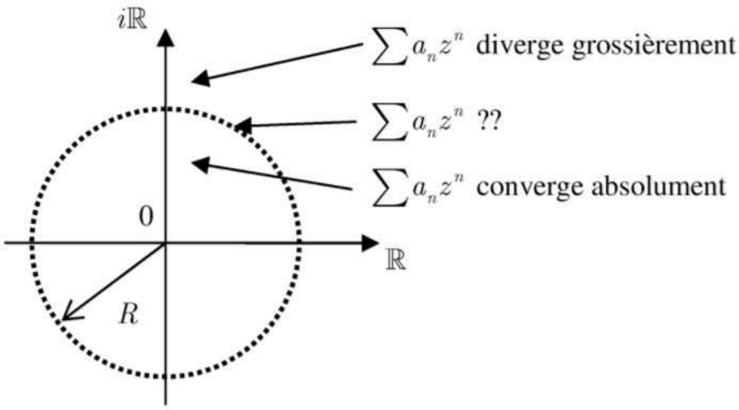
$$|a_n z^n| = \left|\frac{a_n r_0^n z^n}{r_0^n}\right| = |a_n r_0^n| \left|\frac{z}{r_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{r}{r_0}\right|^n.$$

  Comme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ est une série numérique convergente, la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est normalement convergente pour tout z tel que $|z| < r$ et tout r tel que $0 < r < |r_0|$.

Théorème 5.3 *(Définition du rayon de convergence des séries entières) :*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in [0, +\infty[$ tel que :

- *Si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*
- *Si $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement (plus précisément la suite $(a_n z^n)$ n'est même pas bornée).*

R est appelé **rayon de convergence** *de la série et $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ est appelé disque ouvert de convergence.*



Preuve
On commence par définir l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \left\{ |z_0| : z_0 \in \mathbb{C}, \sum a_n z_0^n \quad \text{converge} \right\}$$

$\mathcal{E}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^+$, non vide, car $0 \in \mathcal{E}$. Il y a alors deux possibilités :

- Si $\mathcal{E}$ n'est pas majoré, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ et $\sum a_n z_0^n$ converge. Donc, d'après le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et la propriété ci-dessus est vérifiée avec $R = +\infty$.
- Si $\mathcal{E}$ est majoré, soit $R = \sup \mathcal{E}$.
  - Si $R = 0$, il est clair que pour $z \neq 0$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, sinon on pourrait appliquer le lemme d'Abel (avec $z \to z_0$) et on aboutirait à un rayon au moins égal à $|z|$, c'est-à-dire à une contradiction. Donc $\sum a_n z^n$ est trivialement divergente pour tout z non nul.
  - Si $R > 0$, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, alors par définition de la borne supérieure, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ et $\sum a_n z_0^n$ converge. Du lemme d'Abel, on déduit que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Remarque :

Sur ce disque, la série entière converge assurément. Elle peut aussi converger en certains points du cercle limite.

Exemple : étudions la convergence de la série complexe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n^3 3^{n-1}}$.
Comme :

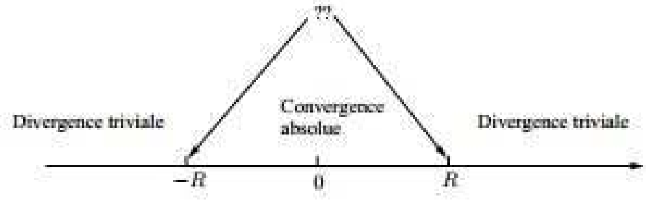
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^n}{(n+1)^3 3^n} \frac{n^3 3^{n-1}}{z^{n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \frac{1}{3} |z| = \frac{1}{3}|z|$$

la série converge pour $|z| < 3$ et diverge pour $|z| > 3$. Pour $|z| = 3$, la série des valeurs absolues est : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n^3 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ qui converge comme p-série avec $p = 3$, donc la série converge absolument et donc simplement pour $|z| = 3$.

5.3 Séries entières réelles

Dans l'ensemble des nombres réels, la série de puissances $\sum a_n x^n$ converge pour $|x| < R$, c'est-à-dire dans un **intervalle de convergence** $-R < x < R$, et diverge pour $|x| > R$. Pour $|x| = R$, la série peut converger ou non.

Les cas particuliers $R = 0$ et $R = \infty$ peuvent arriver. Dans le premier cas, la série converge seulement pour $x = 0$, dans le second cas, elle converge $\forall x$.



Le lemme d'Abel et le fait que la convergence normale implique la convergence absolue et la convergence uniforme permettent alors d'écrire pour les séries réelles :

Théorème 5.4 *(Convergence uniforme et absolue des séries entières réelles) :*
Une série de puissances converge uniformément et absolument sur tout intervalle qui se trouve entièrement dans son intervalle de convergence (c'est-à-dire $\forall x$ tel que $-R < x < R$).

5.4 Séries de puissances entières de $(x-a)$ $\quad, \forall a \in \mathbb{R}$

Par un simple changement de variable $x \to (x-a)$, on peut appliquer tous les résultats précédents aux séries entières du type :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

En particulier, ces séries convergent pour x appartenant à un intervalle centré sur a et de rayon R, c'est-à-dire $\forall x$ tel que $|x-a| < R$ ou encore $-R + a < x < R + a$.

Exemple :
La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à :

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

et converge donc si $|x-2| < 1$, c'est-à-dire entre $1 < x < 3$.
Au point $x = 1$, la série devient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge (c'est la série harmonique alternéee).
Au point $x = 3$, la série devient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge (c'est la série harmonique).
Cette série converge donc sur l'intervalle $[1, 3[$.

5.5 Utilisation du critère de d'Alembert pour calculer le rayon de convergence d'une série entière

Soit la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Considérons la série des modules :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|.$$

C'est une série numérique positive $\forall z$.

Par le test de d'Alembert, la série $\sum |a_n z^n|$ converge si :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z| = L|z| < 1,$$

c'est-à-dire si $|z| < \frac{1}{L}$ avec :

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

et la série $\sum |a_n z^n|$ est grossièrement divergente si $|z| > 1/L$. Donc, le rayon de convergence R d'une série entière complexe vaut :

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Théorème 5.5 *(Intervalle de convergence des séries entières) :*
Une série entière complexe (resp. réelle) converge donc sur un disque de convergence de rayon R (resp.à l'intérieur d'un intervalle $-R < x < R$) avec :

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{4}$$

Exemples :

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ converge absolument (et donc converge) $\forall x \in \mathbb{R}$ car :

  $$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1} = \infty.$$

  L'intervalle de convergence de cette série est donc $-\infty < x < \infty$. Nous verrons plus loin que la somme de cette série correspond à la fonction exponentielle naturelle e^x.

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + ...$ ne converge qu'en $x = 0$ car :

  $$L = \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1} = \infty.$$

  donc $R = 0$, le rayon de convergence est nul.

5.6 Convergence au bord du domaine

Le théorème suivant permet d'étendre la formule de la somme d'une série de puissances jusqu'au bord du domaine de convergence.

Théorème 5.6 *(Théorème d'Abel) :*
Si une série de puissances $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ a un intervalle de convergence fini $|x-c| < R$, et si $f(x)$ est la fonction dont les valeurs sur cet intervalle sont données par la série de puissances, si la série de puissances converge aussi au point extrême à droite (resp. à gauche) $b = c + R$ (resp. $a = c - R$, alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$) existe et est égale à la somme de la série en b (resp. en a).

Exemples :

- On a $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^(n-1)\frac{x^n}{n} \quad \forall |x| < 1$. Au point extrême à droite, $x = 1$, la série devient la série harmonique alternée qui converge. Par Abel, cette série est égale à $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$, donc $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}....$

- Repartons de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$ pour $|x| < 1$.
  Remplaçons x par $-x^2$ pour obtenir :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots \text{ pour } |x| < 1 car |-x^2| < 1 \iff |x| < 1$$

En intégrant les deux membres, on a :

$$\begin{aligned} \text{Arctan}\, x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + K \text{ pour } |x| < 1 \\ &= K + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots \end{aligned}$$

où K est une constante d'intégration.

En $x = 0$, on a : $0 = K + 0 + \ldots$ donc $K = 0$. Il s'ensuit que :

$$\text{Arctan}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \tag{5}$$

Au point extrême $x = -1$, la série devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

qui converge par le théorème des séries alternées. Donc par le théorème d'Abel, on a :

$$\lim_{x \to 1^-} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{6}$$

Exercice 6
Trouver les intervalles de convergence des séries de puissances suivantes :

- $\sum nx^n$
- $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$
- $\sum \frac{x^n}{n5^n}$
- $\sum \frac{x^{2n}}{n(n+1)(n+2)}$
- $\sum \frac{x^{n+1}}{(\ln(n+1))^2}$
- $\sum \frac{x^n}{1+n^3}$
- $\sum \frac{(x-4)^n}{n^2}$
- $\sum \frac{(3x-2)^n}{5^n}$
- $\sum \frac{x^n}{n^2}$

- $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \ldots$
- $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots$
- $1 + \frac{100x}{1.3} + \frac{10000x^2}{1.3.5} + \frac{1000000x^3}{1.3.5.7} + \ldots$
- $\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \ldots$
- $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
- $1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots$
- $(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \ldots$
- $x + \frac{2^k}{2!}x^2 + \frac{3^k}{3!}x^3 + \ldots$
- $x + \frac{2!}{2^2}x^2 + \frac{3!}{3^2}x^3 + \ldots$
- $\sum \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

5.7 Opérations sur les séries entières

Lorsqu'on se place à l'intérieur du disque de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, la somme est une fonction de z. Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux propriétés de cette fonction somme.

5.7.1 Somme de deux séries entières

Proposition 5.7 *(Série somme)*
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b, de sommes S_a et S_b à l'intérieur des disques de convergence. La série entière $\sum c_n z^n$ avec $c_n = a_n + b_n$ a pour rayon $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour somme S_c vérifiant :

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)) \qquad S_c(z) = S_a(z) + S_b(z)$$

S de plus $R_a \neq R_b$ alors $R_c = \min(R_a, R_b)$.

En particulier, pour les séries entières réelles :

Théorème 5.8 *(Somme et différence de deux séries entières réelles) :*
Deux séries de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ *peuvent être ajoutées ou soustraites terme par terme* $\forall x$ *appartenant aux deux intervalles de convergence*

5.7.2 Produit de deux séries entières

Proposition 5.9 *(Série produit)*
Avec les mêmes notations, la série entière $\sum c_n z^n$ *ave* $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$ *a pour rayon* $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ *et pour somme* S_c *vérifiant :*

$$\forall z \in D(0, \min(R_a, R_b)) \qquad S_c(z) = S_a(z).S_b(z)$$

En particulier, pour des séries entières réelles :

Théorème 5.10 *(Multiplication de deux séries entières réelles) :*
Deux séries de puissances , par exemple $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ *peuvent être multipliées pour obtenir une série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ $\forall x$ *appartenant aux deux intervalles de convergence, avec :*

$$c_n = a_0.b_n + a_1.b_{n-1} + a_2.b_{n-2} + ... + a_{n-1}.b_1 + a_n.b_0 \tag{7}$$

5.7.3 Application : l'exponentielle complexe

Définition
La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$. En effet $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|}{n!}$ converge puisque :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et donc converge simplement.
Définisssons alors la somme de cette série comme étant une nouvelle fonction complexe de variable complexe, et notons la $\exp(z)$.

Propriétés

- On a bien sûr $\exp(0) = 1$.

- Calculons la dérivée de cette fonction :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{z^(n-1)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}z^m = \exp(z)$$

  où l'on a posé $m = n-1$.Cette fonction est donc sa propre dérivée.

- $\forall a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$\exp(a).\exp(b) = \exp(a+b) \tag{8}$$

  En effet, on a :

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{n!}\Big|_{z=1} \qquad \text{et} \qquad \exp(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n z^n}{n!}\Big|_{z=1}$$

Le produit de deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ donne une série $\sum c_n z^n$ avec :

$$\begin{aligned}
c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \\
&= \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1}b}{(n-1)!.1} + \cdots + \frac{ab^{n-1}}{1.(n-1)!} + \frac{b^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \frac{1}{n!}(a+b)^n
\end{aligned}$$

La série $\sum c_n.z^n$ a donc pour somme $\exp((a+b)z)$ et sa valeur en 1 est $\exp(a+b)$.On notera donc pour plus de commodité et comme on le fait dans $\mathbb{R}$ la fonction $\exp(z) = e^z$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
e^{jx} &= \cos x + j \sin x && (9) \\
e^{-jx} &= \cos x - j \sin x && (10)
\end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
e^{\pm jx} &= 1 \pm jx - \frac{x^2}{2!} \mp j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \pm j\left(x - \frac{x^3}{3! + \cdots}(\right) \\
&= \cos x \pm j \sin x
\end{aligned}$$

Ce sont les **formules d'Euler**, très utiles notamment pour retrouver rapidement les formules de trigonométrie circulaire.

Exercice 7
Prouver les formules d'addition suivantes en utilisant les propriétés de l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Dans toute la suite de cette section, on considère des séries entières réelles $\sum a_n x^n$.

5.8 Convergence et continuité des séries entières

Proposition 5.11 *(Convergence normale)*
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, alors pour tout $r < R$, la série $\sum a_n x^n$ converge normalement vers sa somme $S(x)$ sur l'intervalle $[-r, r]$

Preuve de la proposition 5.11
$\forall x \in [-r, r]$, on a $|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n$. Or la série $\sum |a_n| r^n$ est convergente par le lemme d'Abel puisque $r < R$.

Proposition 5.12 *(Continuité)*
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, de somme $S(x)$, alors S est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Preuve de la proposition 5.12
Ceci découle du résultat sur les séries de fonctions normalement convergentes. Soit $r < R$: les fonctions $x \to a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$, et la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalemet vers S sur cet intervalle, donc S est continue sur $[-r, r]$. Ceci est vrai pour tout $r < R$. Soit maintenant $|x| < R$, prenons $r \in]|x|, R[$: S est continue sur $[-r, r]$, donc en x. Ainsi S est continue sur $]-R, R[$.

5.9 Dérivation et intégration des séries entières

Proposition 5.13 *(Rayon de convergence de la série dérivée)*
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ est également de rayon R : on l'appelle la série dérivée de $\sum a_n x^n$.

Preuve de la proposition 5.13
Notons R_d le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n$. Si $|x| < R$, soit r tel que $|x| < r < R$, alors :

$$|(n+1)a_{n+1}x^n| = (n+1)\left|\frac{x}{r}\right|^n (|a_{n+1}|r^n)$$

Or :

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\left|\tfrac{x}{r}\right|^n = 0$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)a_{n+1}x^n|}{|a_{n+1}|r^n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\left|\frac{x}{r}\right|^n = 0$$

et la série $\sum |a_{n+1}|r^n = \frac{1}{r}\sum |a_{n+1}|r^{n+1}$ est convergente par définition du rayon de convergence, donc $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ est absolument convergente (par le test du quotient) et par conséquent $R_d \geqslant R$.
Réciproquement, si $x > R$, alors $\sum a_n x^n$ est trivialement divergente, c'est-à-dire que la suite $(a_n x^n)_{n\geqslant 0}$ n etend pas vers zéro, donc la suite $(a_{n+1}x^n)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers zéro non plus. A fortiori, la suite $((n+1)a_{n+1}x^n)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers zéro, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ est trivialement divergente, donc $R_d \leqslant R$. En conclusion, on a bien $Rd = R$.

Proposition 5.14 *(Rayon de convergence de la série primitive)*
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors la série $\sum_{n_geq1} \frac{a_{n-1}}{n}x^n$ est également de rayon R : on l'appele la série primitive de $\sum_{n_geq0} a_n x^n$.

Preuve de la proposition 5.14
Considérons la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$. Par la proposition précédente, elle a même rayon de convergence que sa série dérivée, qui est $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, c'est-à-dire R.

5.10 Fonctions développables en séries entières

5.10.1 Définition

Définition 5.15 *Soit $R > 0$ et $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière sur $]-R, R[$ s'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ tels que :*

$$\forall x \in]-R, R[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

5.10.2 Propriétés

Lorsqu'une fonction est développable en série entière, tout est très simple pour le caclul des dérivées comme des primitives. On a en particulier :

Théorème 5.16 *(Intégration des fonctions développables en séries entières) :*
Soit $f(x)$ développable en série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur son intervalle de convergence (c'est-à-dire $\forall x$ tel que $-R < x < R$, alors :

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \text{ pour } |x| < R \tag{11}$$

où l'intervalle de convergence de la série de puissances de droite est le même que celui de la série originale.

En d'autres mots, la primitive de $f(x)$ s'obtient par une intégration terme à terme de la série de puissances associée à la fonction $f(x)$.

De la même manière, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \tag{12}$$

Théorème 5.17 *(Dérivation des fonctions développables en séries entières) :*
Soit $f(x)$ la fonction développable en série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur son intervalle de convergence (c'est-à-dire $\forall x$ tel que $-R < x < R$, alors :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n x^{n-1} \text{ pour } |x| < R \tag{13}$$

où l'intervalle de convergence de la série de puissances de droite est le même que celui de la série originale.

En d'autres mots, la dérivée de $f(x)$ s'obtient par une dérivée terme à terme de la série de puissances associée à la fonction $f(x)$.

Exemples :

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...$ est une série géométrique de raison x. Elle converge donc pour $|x| < 1$ et sa somme est $\frac{1}{1-x}$.
  Comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ... \qquad \forall |x| < 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\end{aligned}$$

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$ est une série géométrique de raison $-x$. Elle converge donc pour $|x| < 1$ et sa somme est $\frac{1}{1+x}$.
  On a en intégrant :

$$\int \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + K = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + K$$

  et donc :

$$\ln|1+x| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + K \qquad \forall |x| < 1$$

En calculant les deux membres en $x = 0$, on obtient $K = 0$ et donc finalement, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... \qquad \forall |x| < 1 \tag{14}$$

Remarque : comme $|x| < 1, -1 < x < 1$ et $0 < 1 + x < 2$ donc $|1 + x| = 1 + x$.

En remplaçant x par $x - 1$, on a aussi :

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{(x-1)^n}{n} = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + ... \qquad \forall |x-1| < 1 \text{ c'est-à-dire pour } 0 < x < 2$$

donc la fonction $\ln x$ est définie par une série entière sur $]0, 2[$.

Pour une fonction développable en série entière, on savait déjà que $a_0 = f(0)$. La formule 13 donne directement $a_1 = f'(0)$. On peut généraliser grâce à la proposition suivante :

Proposition 5.18 *(Développable en série entière $\Longrightarrow$ $\mathcal{C}^\infty$)*
Si f est développable en série entière sur $]-R, R[$ alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ avec :

$$f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

En particulier, on a la relation entre les coefficients du développement en série entière et dérivées successives de f en 0 :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Toute fonction développable en série entière admet donc un développement en série de Taylor en 0, défini par :

Définition 5.19 *(Série de Taylor)*
La série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée série de Taylor de f en 0

Réciproquement, la question naturelle est alors : si f est $\mathcal{C}^\infty$, est-elle développable en série entière ?

La réponse est non ! Explorons maintenant quelques résultats qui permettent de développer une fonction en série entière.

6 Développements de fonctions en séries entières : séries de Taylor et de Mac Laurin

6.1 Introduction : polynômes de Taylor

Un moyen simple pour explorer les représentations en série de fonctions est de supposer qu'une telle représentation existe et de découvrir les détails. Bien sûr, tout ce qui est trouvé doit être confirmé de manière rigoureuse. Supposons qu'une fonction $f(x)$ puisse être représentée par :

$$f(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \cdots + A_n(x-c)^n + \cdots$$

au voisinage de c.

Notons que les coefficients A_n peuvent être reliés aux dérivées successives de f. En particulier, on a :

$$A_0 = f(c), \qquad A_1 = f'(c) \qquad A_2 = \tfrac{f''(c)}{2!} \qquad , \cdots , \qquad A_n = \tfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Ceci suggère qu'une représentation en série de $f(x)$ est :

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

Un premier pas pour formaliser la représentation en série d'une fonction f pour laquelle les dérivées existent jusqu'à l'ordre n est réalisé en introduisant les polynômes de Taylor de la fonction :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0(x) &= f(c)\\
\mathcal{P}_1(x) &= f(c) + f'(c)(x-c)\\
\mathcal{P}_2(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2\\
&\dots\\
\mathcal{P}_n(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x-c)^i
\end{aligned}$$

où $f^{(i)}$ désigne la dérivée $i^{\text{ème}}$ de la fonction f.

6.2 Formule de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor (1685-1731), qui l'établit en 1712, donne une **approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un poin**t par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Théorème 6.1 *(Formule de Taylor) :*
Supposons que $f(x)$ et ses dérivées $f', f'', ..., f^{(n)}$ existent et soient continues dans un intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$ et supposons que $f^{(n+1)}$ existe dans un intervalle ouvert $a < x < b$. Alors, $\forall c \in [a,b]$, on peut écrire :

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + R_n(x)$$

où :

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \tag{15}$$

désigne le reste sous forme intégrale.

Preuve
On raisonne par récurrence sur n.
Le théorème est vrai pour $n = 0$ car on a bien :

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\mathrm{d}t = f(c) + [f(t)]_c^x = f(c) + f(x) - f(c)$$

Supposons (hypothèse de récurrence) le théorème vrai pour $n = k$ et montrons qu'il est alors vrai pour $n = k+1$. On a donc :

$$f(x) = \mathcal{P}_k(x) + R_k(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

On utilise l'intégration par parties pour calculer :

$$\frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Posons :

$$\left\{\begin{array}{l} u'(t) = (x-t)^k \\ v(t) = f^{(k+1)}(t) \end{array}\right|$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{r} u(t) = \frac{1}{k+1}(x-t)^{k+1}.(-1) \\ v'(t) = f^{(k+2)}(t) \end{array}\right|$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}(x-t)^{k+1}.f^{(k+1)}(t)\right]_c^x + \frac{1}{k!}\frac{1}{k+1}\int_c^x \mathrm{d}t(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t)\\
&= \frac{1}{(k+1)!}(x-c)^{k+1}.f^{(k+1)}(c) + \frac{1}{(k+1)!}\int_c^x \mathrm{d}t(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t)
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{1}{(k+1)!}(x-c)^{k+1}.f^{(k+1)}(c)\\
&\quad + \frac{1}{(k+1)!}\int_c^x \mathrm{d}t(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t)\\
&= \mathcal{P}_{k+1}(x) + R_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

La formule est donc vraie à l'ordre $k+1$ ce qui termine la preuve.

6.3 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 6.2 *(Formule de Taylor-Lagrange)*

Soient I un intervalle ouvert, f une fonction n fois dérivable dans I, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{(n)!}h^n \tag{16}$$

Preuve
Posons $x_0 + h = x$, et considérons la fonction F définie dans I par :

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f^{(1)}(t)}{1!}.(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}.(x-t)^{n-1}$$

Par un calcul facile nous obtenons :

$$F'(t) = -f^{(1)}(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}.(x-t) + \cdots + (n-1)(x-t)^{n-2}.\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}.(x-t)^{n-1} = -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}.(x-t)^{n-1}$$

Définissons G sur I par :

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^n.F(x_0)$$

Nous avons $G(x_0) = G(x) = 0$. Par application du théorème de Rolle, il existe c entre x et x_0 tel que :

$$0 = G'(c) = F'(c) + n.\frac{(x-c)^{n-1}}{(x-x_0)^n}F(x_0)$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(x_0) &= -\frac{1}{n}\frac{(x-x_0)^n}{(x-c)^{n-1}}F'(c) \\ &= \frac{1}{n}\frac{(x-x_0)^n}{(x-c)^{n-1}}\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}.(x-c)^{n-1} \\ &= \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(c) \end{aligned}$$

qui donne la formule attendue.

6.3.1 Exemples et remarques

- Si $x_0 = 0$, la formule de Taylor-Lagrange s'écrit :

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}.x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}.x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}x^n$$

  avec ξ dans l'intervalle $]0,x[$ ou $]x,0[$ selon que x est positif ou négatif.

- En particulier pour $f(x) = \sin(x)$, pour $x_0 = 0$ et $n = 5$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(0) + \frac{\sin^{(1)}(0)}{1!}.x + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2!}.x^2 + \frac{\sin^{(3)}(0)}{3!}.x^3 + \frac{\sin^{(4)}(0))}{4!}.x^4 + \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cos\xi \end{aligned}$$

  avec ξ entre 0 et x.

- Si $f(x) = \cos(x)$, pour $x_0 = 0$ et $n = 5$, nous avons :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(0) + \frac{\cos^{(1)}(0)}{1!}.x + \frac{\cos^{(2)}(0)}{2!}.x^2 + \frac{\cos^{(3)}(0)}{3!}.x^3 + \frac{\cos^{(4)}(0))}{4!}.x^4 + \frac{\cos^{(5)}(\xi)}{5!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}\sin\xi \end{aligned}$$

  avec ξ entre 0 et x. On en déduit l'encadrement suivant :

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

6.3.2 Autre formulation de la formule de Taylor-Lagrange

Un simple changement de notations dans la formulation précédente de la formule de Taylor-Lagrange donne aussi le :

Théorème 6.3 *(Formule de Taylor-Lagrange, autre forme)*

Supposons que $f(x)$ et ses dérivées $f', f'', ..., f^{(n)}$ existent et soient continues dans un intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$ et supposons que $f^{(n+1)}$ existe dans un intervalle ouvert $a < x < b$. Alors, $\forall c \in [a,b]$, on peut écrire :

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + R_n(x)$$

où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \xi \in [c,x]$ tel que le reste peut-être mis sous la forme suivante :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1} \tag{17}$$

6.3.3 Formule de Cauchy du reste

On peut aussi dans le théorème précédent donner une autre forme au reste, la forme de Cauchy :

Théorème 6.4 *(Forme de Cauchy du reste) :*
Le reste peut-être mis sous la forme suivante :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.(x-c) \tag{18}$$

Preuve
Le théorème de la moyenne :

Théorème 6.5 *Pour toute fonction à valeurs réelles, définie et continue sur $[a,b]$, il existe un réel ξ compris entre a et b, a et b étant exclus, vérifiant :*

$$f(\xi) = \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

donne ici directement :

$$\tfrac{1}{n!} \int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{n!}(x-c)(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)$$

6.4 La formule de Taylor-Young

Théorème 6.6 *(Formule de Taylor-Young)*

Soit I un intervalle ouvert contenant x_0, et soit f une fonction n fois dérivable dans I telle que $f^{(n)}$ soit continue en x_0 (cette hypothèse est vérifiée si $f^{(n+1)}(x_0)$ existe). Alors il existe une fonction ε, définie au voisinage de 0, telle que :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}h^n + h^n\varepsilon(h) \tag{19}$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Preuve
Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n, nous avons :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \tfrac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.h + \tfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.h^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \tfrac{f^{(n)}(x_0+\theta_h h)}{(n)!}h^n$$

avec $\theta_h \in]0,1[$ (nous utilisons la notation θ_h pour bien indiquer que θ_h dépend de h.
Posons $\varepsilon(h) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0+\theta_h h) - f^{(n)}(x_0)\right)$. Nous avons :

$$\lim_{h\to 0}(x_0+\theta_h.h) = x_0 \text{ et } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

car $f^{(n)}$ est continue en x_0, ce qui prouve le théorème.

6.5 Séries de Taylor et de Mac Laurin

6.5.1 Introduction

Si toutes les dérivées de f existent, on peut explorer la forme sans reste :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n \tag{20}$$

La question est évidemment de voir si cette série converge, et si elle converge vers $f(x)$.

Comme mentionné à la définition 5.19, la série précédente porte le nom de **série de Taylor** (ou **de Mac Laurin** si $c = 0$).

Même si toutes les dérivées existent, le développement en série proposé n'est pas forcément correct, car la série peut ne pas converger vers $f(x)$.

La détermination des valeurs de fonctions peut toutefois se faire avec une bonne approximation par les polynômes de Taylor.

Exemple :
Calculons la valeur approchée de la fonction $\sin(x)$ en $x = 0,3$ en utilisant le polynôme de Taylor d'ordre 4.
Le développement de Mac Laurin à l'ordre 5 est :

$$\sin x \approx 0 + x - 0 - \tfrac{1}{3!}x^3 + 0 + \tfrac{1}{5!}x^5$$

Les polynômes de Taylor à l'ordre 3 et 4 valent :

$$\mathcal{P}_3(x) = \mathcal{P}_4(x) = x - \tfrac{x^3}{3!}$$

et le reste d'ordre 4 (sous la forme de Lagrange) vaut :

$$R_4(x) = \tfrac{1}{5!} f^{(5)}(\xi) x^5 = \tfrac{1}{5!} \cos \xi x^5$$

On a donc :

$$\mathcal{P}_4(0,3) = 0,3 - \tfrac{1}{6}(0,3)^3 \approx 0,2945$$

La précision de cette aproximation peut être déterminée en examinant le reste :

$$|R_4| = \left|\tfrac{1}{5!} \cos \xi (0,3)^5\right| \leqslant \tfrac{1}{120} \tfrac{243}{10^5} < 0,000021$$

L'approximation est donc correcte à 4 décimales.

6.5.2 Convergence des séries de Taylor et de Mac Laurin

Montrons que certaines fonctions sont représentées par leur série de Taylor en montrant que $R_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Par la formule de Taylor, comme :

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

si $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, alors :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

et $f(x)$ est égale à sa série de Taylor.

Remarque :

On a toujours $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d^n}{n!} = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}$. En effet, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et converge donc $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc, son terme général tend forcément vers zéro et on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d^n}{n!} = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}$.

Exemples :

- **La fonction $\sin x$ est égale à la somme de sa série de Mac Laurin (ou de Taylor si $c \neq 0$).**

  Si $f(x) = \sin x$, toutes les dérivées sont égales à $\pm\sin x$ ou $\pm\cos x$ et on a donc $|f^{(n)}(x) \leqslant 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \end{aligned}$$

  Par la remarque ci-dessus, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = 0$ et on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
  Donc $\sin x$ est égal à sa série de Mac Laurin et on a :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{21}$$

  Comme le rayon de convergence de cette série est infini, cette égalité est valable $\forall x \in \mathbb{R}$.

- **La fonction $\cos x$ est égale à la somme de sa série de Taylor.**

  Pour le voir on peut utiliser le fait que l'on peut dériver terme à terme une série entière. On obtient en dérivant la série précédente :

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)!} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned} \tag{22}$$

  Comme le rayon de convergence de cette série est infini, cette égalité est valable $\forall x \in \mathbb{R}$.

- **La fonction e^x est égale à la somme de sa série de Mac Laurin.**

  En effet, la fonction e^x est sa propre dérivée, donc $f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1 \quad _foralln \in \mathbb{N}$, donc :

$$|R_n(x)| = e^{\xi} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \to 0 \quad \text{lorsque} n \to \infty$$

  par la remarque précédente et on a donc :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{23}$$

  Remarque : on savait déjà que la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ convergeait $\forall x \in \mathbb{R}$. Appelons $f(x)$ sa somme. En dérivant terme à terme, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) \end{aligned}$$

où l'on a posé dans la dernière équation $n = k-1$. Comme on a de plus $f(0) = 1$, on conclut que $f(x) = e^x$ car e^x est par définition la seule fonction qui est sa propre dérivée et qui vaut 1 en $x = 0$.

- **La série binomiale.**
  Considérons la série suivante :

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}x^n \quad \forall r \neq 0$$

Cette série converge pour $|x<1|$; en effet, par le test du rapport (critère de d'Alembert), on a :

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \left|\frac{r(r-1)\ldots(r-n-1+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{r(r-1)\ldots(r-n+1)}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \frac{1}{n+1}|r-n|\,|x|$$

donc $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|r-n|\,|x| = |x|$. Si $|x|<1$, la série converge donc. Essayons de déterminer vers quelle somme. Posons $y(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}x^n$. Comme cette série converge $\forall x$ tel que $|x|<1$, on peut dériver terme à terme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}nx^{n-1}$$

Multiplions par $(1+x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}(1+x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y &= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}nx^{n-1}(1+x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}nx^{n}\\ &= r+\sum_{n=2}^{\infty}\binom{r}{n}nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}nx^{n}\\ &= r+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{r}{k+1}(k+1)x^{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{r}{k}kx^{k}\end{aligned} \tag{24}$$

où l'on a posé $k = n-1$ dans la première série et $k = n$ dans la seconde. Les deux séries ont pour somme la série suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty}r\binom{r}{k}x^k$$

car :

$$\begin{aligned}\binom{r}{k+1}(k+1)+\binom{r}{k}k &= \frac{r!(k+1)}{(k+1)!(r-k-1)!}+\frac{r!k}{k!(r-k)!}\\ &= \frac{r!}{k!(r-k-1)!}+\frac{r!k}{k!(r-k-1)!(r-k)}\\ &= \frac{r!(r-k)+r!k}{k!(r-k-1)!(r-k)}\\ &= \frac{rr!}{k!(r-k-1)!(r-k)}\\ &= r\binom{r}{k}\end{aligned}$$

On a donc :

$$(1+x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = r+r\sum_{k=1}^{\infty}\binom{r}{k}x^k = ry$$

On peut trouver la fonction $y(x)$, solution de cette équation différentielle en utilisant la méthode de séparation des variables :

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\frac{r}{1+x}\mathrm{d}x$$

ou encore :

$$\ln y = r\ln(1+x)+K$$

c'est-à-dire :

$$y = k(1+x)^r$$

Comme $y(0) = 1$, on déduit directement $k = 1$. Finalement, on a donc prouvé le résultat suivant :

Théorème 6.7 *(Série binomiale)*

$$(1+x)^r = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}x^n \quad \forall r\neq 0 \quad \forall x \text{ tel que } |x|<1 \tag{25}$$

Remarque :

La série binomiale :

- se réduit à une somme finie si p est un entier positif ou nul ;
- converge absolument pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$ si $p > 0$ et $p \notin \mathbb{Z}$;
- converge pour $-1 < x < 1$ si $-1 < p < 0$;
- converge pour $-1 < x < 1$ si $p \leqslant -1$

La série binomiale converge donc certainement $\forall p$ sur $-1 < x < 1$.

6.5.3 Une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière

Nous avons vu qu'il n'était pas suffisant qu'une fonction soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour qu'elle soit développable en série entière. La condition nécessaire et suffisante, au vu de la formule de Taylor avec reste intégral, est donc que :

$$\forall x \in]-R,R[\qquad \lim_{N\to\infty} R_n(x) = 0$$

ce qui n'est pas commode à vérifier, vu la façon dont le reste R_N est défini. On peut toutefois donner la une condition suffisante :

Proposition 6.8 *($\mathcal{C}^\infty$ et dérivées bornées $\Longrightarrow$ fonction développable en série entière)*
Si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et s'il existe une constante M telle que :

$$\forall x \in]-R,R[,\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant M,$$

alors f est développable en série entière en 0.

Preuve de la proposition 6.8
Avec les notations précédentes, il suffit de vérifier que pour tout $x \in]-R,R[$, la suite $(R_n(x))_{N\geqslant 0}$ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini.

$$|R_N(x)| = \left| {}_i nt_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x \left| \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \leqslant M \int_0^x \frac{(x-t)^N}{n!} \mathrm{d}t,$$

intégrale facile à calculer :

$$|R_N(x)| \leqslant M \left[\frac{(x-t)^{N+1}}{(N+1)!} \right]_0^x = M \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

6.5.4 Quelques importants développements en séries de puissances

$$
\begin{aligned}
(1+x)^a &= 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots \\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x<1 \\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x<1 \\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1\leqslant x<1 \\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x\leqslant 1 \\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x<1 \\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty \\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty \\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+ \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\cdots \\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots+\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots, \\
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty \\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty \\
\mathrm{th}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty \\
\mathrm{Arcsin}(x) &= x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+\cdots \quad \text{converge pour } -1\leqslant x\leqslant 1 \\
\mathrm{Arccos}(x) &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+\cdots \text{converge pour } -1\leqslant x\leqslant 1 \\
\mathrm{Argsh}(x) &= x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+\cdots \\
\mathrm{Arctan}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1\leqslant x\leqslant 1 \\
\mathrm{Argth}(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots
\end{aligned}
$$

Remarque : les coefficients B_n qui apparaissent dans le développement limité de la fonction tangente sont les nombres de Bernoulli)

Exercice 8

- Calculer la série de Taylor de $y=\frac{1}{x}$ autour de 1 ; quel est son intervalle de convergence ?
- Développer $y=\frac{1}{10+x}$ en puissances de x ; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?
- Développer $y=\cos x$ en puissances de $(x-\frac{\pi}{4})$; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?
- Développer $y = e^{-x}$ en série de Mac Laurin ; estimer $y(1)$ avec les polynômes de Taylor $\mathcal{P}_0(x), \mathcal{P}_1(x), \mathcal{P}_2(x), \mathcal{P}_3(x), \mathcal{P}_4(x)$ et comparer à la valeur donnée par la machine ; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?

- Développer $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en série de puissances de $(x-1)$; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?
- Trouver le développement autour de 0 de $\cos x^2$, xe^{-2x}, $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

Table des matières