

Chapitre 2 : calcul intégral, rappels et applications géométriques

1 Intégrale définie : intégrale de Riemann

1.1 Introduction

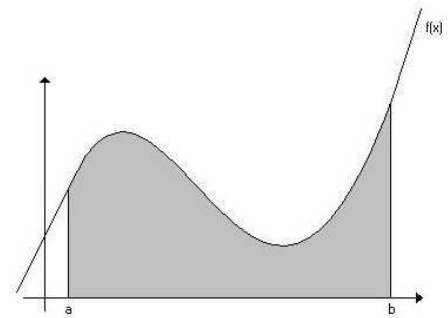
Dans tout ce chapitre, $a < b$ sont des réels. L'idée intuitive d'intégrale d'une fonction est celle "d'aire sous sa courbe" (au moins pour une fonction positive). Nous allons ici donner une façon de construire théoriquement l'intégrale à partir de cette idée (il existe d'autres constructions comme notamment celle de Lebesgue).

En fait, si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et si C_f est sa courbe représentative dans un repère, alors on va définir l'intégrale de f sur l'intervalle $[a; b]$, notée :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx. \tag{1}$$

par l'aire \mathcal{A} de la surface (grisée sur le dessin) délimitée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a : \text{droite verticale} \\ x = b : \text{droite verticale} \\ y = 0 : \text{axe des abscisses} \\ C_f \equiv y = f(x) : \text{graphe de la fonction } f \end{array} \right.$$



Plus précisément :

Si f est une fonction réelle positive continue prenant ses valeurs dans un segment $I = [a, b]$, alors l'intégrale de f sur I , notée :

$$\int_{x \in I} f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b]} f(x) dx \tag{2}$$

est l'aire d'une surface délimitée par la représentation graphique de f et par les trois droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$, surface notée S_f , soit :

$$S_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \in I \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{3}$$

On donne un signe positif à l'aire des surfaces comme S_f situées au-dessus de l'axe des abscisses.

Pour pouvoir traiter aussi les fonctions négatives, on donne un signe négatif aux portions situées sous cet axe.

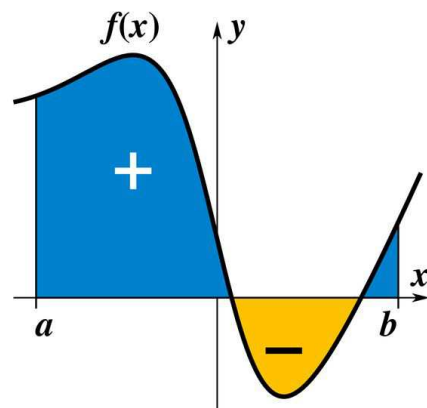
Ainsi, pour définir l'intégrale d'une fonction continue dans le cas général (positive ou négative), il suffit de définir f^+ et f^- comme suit :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

puis de définir l'intégrale de f à partir de f^+ et f^- , fonctions continues et positives :

$$\int_{x \in I} f dx = \int_{x \in I} f^+ dx - \int_{x \in I} f^- dx \tag{4}$$



Plus précisément, définir l'aire de cette surface consiste, dans la définition de la théorie de Riemann, à approcher f par une suite de fonctions g_n dont on connaît l'intégrale (en général : des rectangles qu'on définit d'aire égale à \pm longueur \times largeur) et telle que la différence entre f et g_n tende vers 0 quand n tend vers l'infini.

Il se trouve qu'avec cette méthode, il est possible de définir l'aire d'une fonction continue présentant un ensemble dénombrable de points de discontinuité.

On appelle f un intégrande, et on note \int (un s allongé, mis pour somme) l'opérateur mathématique, appelé intégrateur, qui est associé à l'intégration.

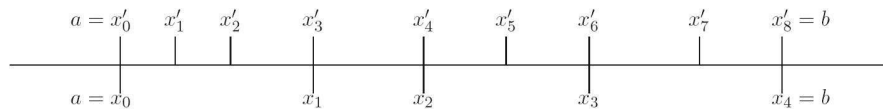
1.2 Fonction intégrable au sens de Riemann

1.2.1 Subdivisions

On appelle **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$, un ensemble fini de points $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Les x_i (avec $i \in \{0, \dots, n\}$) sont alors appelés **points de la subdivision** et les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ (avec $i \in \{1, \dots, n\}$) sont appelés **intervalles de la subdivision**. Le **pas de la subdivision**, sera le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ lorsque i est compris entre 1 et n .

Une subdivision \mathcal{X}' est dite plus fine que \mathcal{X} , si l'ensemble \mathcal{X}' contient \mathcal{X} (plus fine = plus de points). Le pas de la subdivision \mathcal{X}' est donc plus petit que celui de \mathcal{X} . Obtenir une subdivision plus fine que $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ revient à subdiviser les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$.

Exemple :



1.2.2 Définition : fonction en escalier

Une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **en escalier** (ou encore **étagée**) si, et seulement si, il existe une subdivision de $[a; b]$ adaptée à f , c'est-à-dire un ensemble de points (subdivision) de $[a; b]$ tel que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \in \mathbb{N}) ;$$

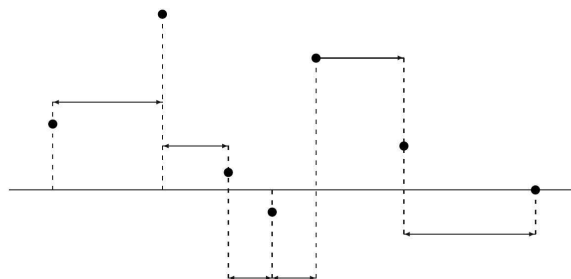
et un ensemble de nombres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tels que, pour k variant de 1 à n , la fonction soit constante sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ et y prenne la valeur λ_k , c'est-à-dire :

$$\forall k \in [1; n] \cap \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in]x_{k-1}; x_k[\quad f(x) = \lambda_k .$$

Remarque : aux points x_k la fonction peut prendre d'autres valeurs éventuellement.

On dira que la subdivision $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est adaptée à la fonction en escalier f si f est constante sur chacun des intervalles $]x_{k-1}, x_k[$. Toute subdivision plus fine que \mathcal{X} est encore adaptée à f .

Notation : on notera $\mathcal{E}([a; b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$.



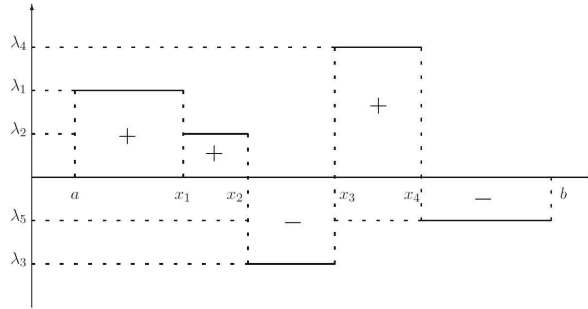
1.2.3 Définition : intégrale d'une fonction en escalier

Soit f une fonction en escalier définie sur $[a, b]$. Si $\mathcal{X} = \{x_0, \dots, x_n\}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , et si, pour k compris entre 1 et n , on appelle $\lambda_k = f(x_{k-1})$ la valeur prise par la fonction f en un point quelconque

a_{k-1} de l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$, on peut considérer la somme :

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) (x_{i+1} - x_i)$$

Remarquons que le nombre $|\lambda_k| (x_k - x_{k-1})$ est l'aire géométrique du rectangle de hauteur $|\lambda_k|$ et de base $x_k - x_{k-1}$. Le nombre σ représente donc l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de f qui est formé d'une réunion finie de rectangles. Les aires des rectangles situés en dessous de l'axe des x sont comptées négativement.



Cette somme ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie. Prendre une subdivision plus fine revient à décomposer les rectangles précédents en rectangles plus petits, et la somme reste inchangée. Cette somme ne dépend que de f , et sera notée :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

et on l'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$.

En résumé, on a donc la définition suivante :

Soit $f \in \mathcal{E}([a; b])$. L'intégrale de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre réel :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) (x_{i+1} - x_i)$$

où $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ $a_i \in]x_i, x_{i+1}[$.

Exemple : pour la fonction partie entière, on a en choisissant la subdivision $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$:

$$\int_0^4 E(x)dx = \sum_{k=1}^4 (x_k - x_{k-1})E(x_{k-1}) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6.$$

1.2.4 Définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée

Toutes les fonctions envisagées désormais sont des fonctions à valeurs réelles définies sur un segment $[a, b]$ et bornées sur cet intervalle. Pour une fonction bornée, il existe donc un nombre M , tel que, pour tout x de $[a, b]$, on ait :

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Notons :

$$\mathcal{E}^+ = \{\varphi \in \mathcal{E}([a; b]) \mid \varphi \geq f\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^+(f) = \left\{ I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in \mathcal{E}^+ \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{I}^+(f)$ n'est pas vide car il contient :

$$\int_a^b M dx = M(b - a). \tag{5}$$

D'autre part, si φ est une fonction en escalier telle que $\varphi \geq f$, on a aussi $\varphi \geq -M$, et donc :

$$\int_a^b \varphi(x)dx \geq -M(b-a).$$

L'ensemble $\mathcal{I}^+(f)$ est donc minoré et non vide. Il possède par conséquent dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} une borne inférieure (par la propriété de la borne inférieure que possède \mathbb{R}).

On note $I^+(f)$ cette borne inférieure, qui est appelée **intégrale supérieure** de f .

De même, si l'on pose :

$$\mathcal{E}^- = \{ \psi \in \mathcal{E}([a; b]) \mid \psi \leq f \} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^-(f) = \left\{ I(\psi) = \int_a^b \psi(x)dx \mid \psi \in \mathcal{E}^- \right\} \tag{6}$$

le même raisonnement montre que cet ensemble n'est pas vide et est majoré (par $M(b-a)$). Sa borne supérieure existe donc (car \mathbb{R} vérifie cette propriété de la borne supérieure). On note $I^-(f)$ cette borne supérieure, qui est appelée **intégrale inférieure** de f . Donc :

$$I^+(f) = \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a; b]) \\ \varphi \geq f}} I(\varphi) \tag{7}$$

$$I^-(f) = \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a; b]) \\ \psi \leq f}} I(\psi) \tag{8}$$

La fonction f est dite **intégrable au sens de Riemann** si, et seulement si :

$$I^+(f) = I^-(f)$$

De plus, le nombre réel $I = I^+(f) = I^-(f)$ est alors appelé **l'intégrale de Riemann** de la fonction f sur $[a; b]$ et est noté :

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{9}$$

En particulier, d'après ce qui précède, une fonction en escalier est Riemann-intégrable.

Remarque : la variable d'intégration est "muette" : cela signifie que :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

1.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

1.3.1 Définition : fonction continue par morceaux

Une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux si, et seulement si, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ ($n \in \mathbb{N}$) de $[a; b]$ telle que :

- f soit continue sur chaque intervalle $]a_{i-1}; a_i[\forall i \in [1; n] \cap \mathbb{N}$;
- $\lim_{x \rightarrow a_{i-1}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)$ existent et sont finies

Une telle subdivision est alors dite adaptée à f .

Notation : on notera $\mathcal{CM}([a; b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$.

Exemples : les fonctions continues et les fonctions en escalier sont des fonctions continues par morceaux.

Remarques :

- les valeurs prises par une fonctions continue par morceaux aux points de subdivision n'importent pas.
- si une subdivision \mathcal{X} est adaptée à une fonction continue par morceaux alors toute subdivision plus fine que \mathcal{X} l'est aussi.

1.3.2 Propriétés des fonctions continues par morceaux

Théorème 1.1 Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont continues par morceaux alors $\lambda.f, f + g, f.g$ et $|f|$ le sont aussi.

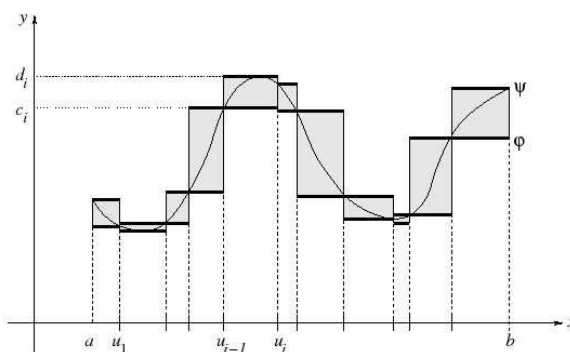
Théorème 1.2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ avec $\alpha < \beta$.
Si f est continue par morceaux alors $f|_{[\alpha, \beta]}$ l'est aussi.

Théorème 1.3 Toute fonction continue par morceaux de $[a, b]$ vers \mathbb{R} est bornée.

1.3.3 Approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier

Théorème 1.4 Soit $f \in \mathcal{CM}([a; b])$ une fonction continue par morceaux. Il existe deux fonctions en escalier ψ et φ qui encadrent d'aussi près que l'on veut la fonction f , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \psi, \varphi \in \mathcal{E}([a; b]) \mid \varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \varepsilon$$



Théorème 1.5 Toute fonction continue par morceaux est Riemann-intégrable.

1.3.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Propriété : linéarité de l'intégrale

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a; b])$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx; \tag{10}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \tag{11}$$

Croissance de l'intégrale

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux ; on a :

- Si $f \leq 0$ alors $\int_a^b f \geq 0$.
- Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Preuve

Si f est positive alors la fonction nulle est une fonction en escalier inférieure à f donc $\int_a^b f \geq I_{[a,b]}(0) = 0$.

Si $f \leq g$ alors $g - f \geq 0$ donc $\int_a^b (g - f) \geq 0$ puis par linéarité $\int_a^b g \geq \int_a^b f \geq 0$.

Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{CM}([a; b])$. $\forall c \in [a; b]$ on a :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve

Si f est en escalier sur $[a; b]$ et si $(a_0; a_1; \dots; a_p = c; \dots; a_n)$ est une subdivision de $[a; b]$ adaptée à f , alors :

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)dx &= \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i) \\ \int_c^b f(x)dx &= \sum_{i=p}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i). \end{aligned}$$

Le résultat est alors évident.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{CM}([a; b])$. On a :

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx; \quad (12)$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \quad (13)$$

Propriété : intégrale et valeur absolue ou inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{CM}([a; b])$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (14)$$

Preuve

- On peut utiliser la croissance de l'intégrale :
 $-|f| \leq f \leq |f|$ donc par croissance $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$
- Une autre démonstration peut se faire en considérant les parties positive et négative de la fonction $f : f^+ = \frac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$.
 On a alors $f = f^+ - f^-$, et f^+ et f^- sont des fonctions positives, donc d'intégrales positives. Donc, en utilisant les propriétés de la valeur absolue de la somme :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f^+(x)dx \right| + \left| \int_a^b f^-(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)|dx \end{aligned}$$

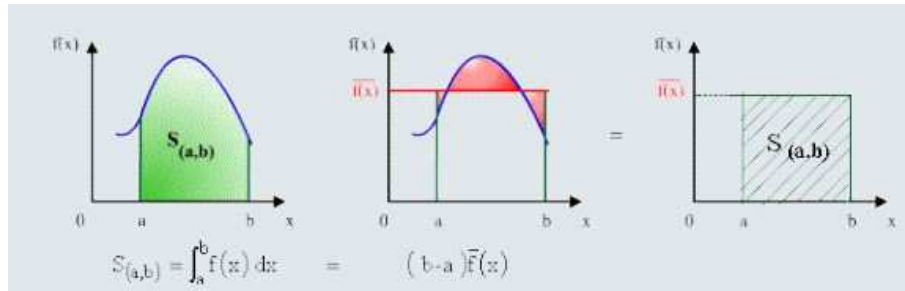
1.4 Intégrale et moyenne

Définition : valeur moyenne d'une fonction

Soit $f \in \mathcal{CM}([a; b])$. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$ est le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \tag{15}$$

Interprétation graphique : μ est la valeur de la fonction constante qui aurait sur $[a; b]$ la même intégrale que f .



Exercice 1

- Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \rightarrow 9x^2 + 15$ entre $x = 2$ et $x = 5$.
- Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \rightarrow \cos(x) + \sin(x)$ entre $x = 0$ et $x = 2\pi$.

Inégalité de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{CM}([a; b])$.

Si $\exists m, M \in \mathbb{R} | \forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m \leq \mu \leq M,$$

c'est-à-dire encore :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \tag{16}$$

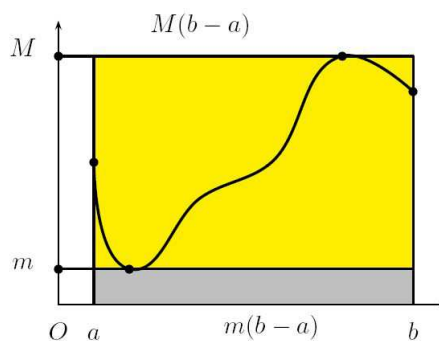
Preuve

Comme pour tout x de $[a, b]$, on a $m \leq f(x) \leq M$, on a, d'après la propriété de croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

c'est-à-dire :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$



Exercice 2

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $1 + x \leq e^x \leq 1 + x.e^x$.
Appliquez l'inégalité de la moyenne à la fonction $t \rightarrow e^t$ sur l'intervalle $[0, x]$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
Appliquez l'inégalité de la moyenne à la fonction $t \rightarrow \frac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0, x]$

Théorème 1.6 *Théorème de la moyenne*

Pour toute fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, il existe un réel c compris entre a et b (a et b étant exclus) vérifiant :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (17)$$

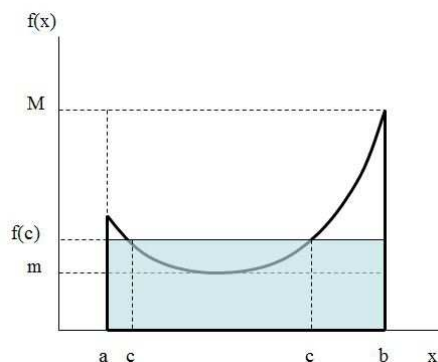
Preuve

Par l'inégalité de la moyenne, on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Or, f étant continue sur $[a; b]$, elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M au moins une fois (théorème des valeurs intermédiaires). Donc $\exists c \in]a; b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$



2 Théorème Fondamental de l'Analyse : lien intégrale-primitives

Voici maintenant le lien entre l'intégration et les primitives :

Théorème Fondamental de l'Analyse (Leibniz-Newton)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

La fonction :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt \quad (18)$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

On en déduit que pour toute primitive F de f :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (19)$$

Remarques :

- Dans la première partie du Théorème, la variable x est la "borne d'en haut" de l'intégrale : c'est pour cela qu'on parle parfois de "l'intégrale fonction de la borne d'en haut".
- Dans la deuxième partie du Théorème, la primitive F choisie est quelconque et ce n'est pas nécessairement celle donnée dans la première partie.
- C'est ce Théorème qui permet de montrer que toute fonction continue admet des primitives.

Preuve

- Il est clair que F s'annule en a :

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$$

Il faut montrer maintenant que F est bien une primitive de f , c'est-à-dire que $F' = f$ ou encore (par définition de la dérivée) que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right)$$

donc :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right)$$

(où on a décomposé la première intégrale grâce à la Relation de Chasles) et finalement :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

c'est-à-dire la valeur moyenne μ de f entre x_0 et x (ou x et x_0 , selon leur ordre).

Mais f est continue sur $[a; b]$ et l'inégalité de la moyenne montre que :

$$\min_{t \in [x_0, x]} f(t) \leq \mu \leq \max_{t \in [x_0, x]} f(t),$$

donc le Théorème des Valeurs Intermédiaires assure qu'il existe $c_{x_0} \in [x_0; x]$ tel que :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \mu = f(c_{x_0}).$$

Comme c_{x_0} est compris entre x_0 et x (ou x et x_0), le Théorème des Gendarmes assure que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c_{x_0} = x_0$$

et (par continuité de f) que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(c_{x_0}) = f(x_0)$$

C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

- Soit G la primitive qui était désignée par F dans la première partie du Théorème. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) = G(b) - G(a)$$

puisque $G(a) = 0$.

Toute autre primitive F de f diffère de G par une constante $k \in \mathbb{R}$, donc $F(x) = G(x) + k \forall x \in [a; b]$ et :

$$F(b) - F(a) = (G(b) + k) - (G(a) + k) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(x) dx,$$

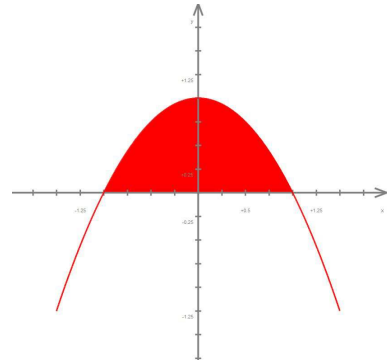
ce qui est le résultat annoncé.

Exemples :

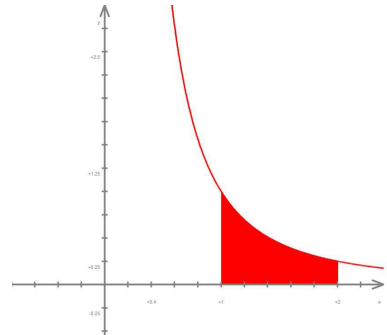
$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

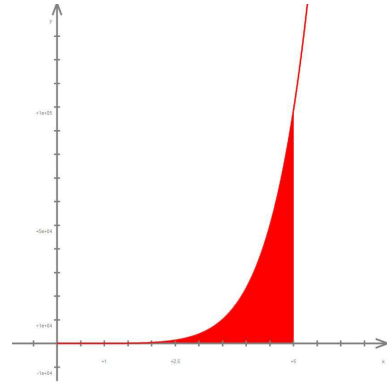
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \\ &= 2 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= -\frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_1^5 x(2+x^2)^3 dx \\
 &= \int_1^5 x(x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8) dx \\
 &= \int_1^5 x^7 + 6x^5 + 12x^3 + 8x dx \\
 &= \left[\frac{x^8}{8} + 6\frac{x^6}{6} + 12\frac{x^4}{4} + 8\frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=5} \\
 &= \left[\frac{x^8}{8} + x^6 + 3x^4 + 4x^2 \right]_{x=1}^{x=5} \\
 &= \left(\frac{5^8}{8} + 5^6 + 3 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^2 \right) - \left(\frac{1}{8} + 1 + 3 + 4 \right) \\
 &= 66420
 \end{aligned}$$

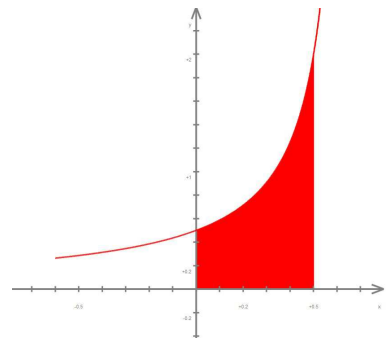


$$I_4 = \int_0^{0,5} \frac{1}{2-3x} dx$$

On reconnaît une fraction rationnelle constituée :

- au numérateur d'un polynôme de degré 0
- au dénominateur d'un polynôme de degré 1

Cette fraction peut se bricoler pour arriver à une expression de la forme $\frac{u'}{u}$, qui s'intégrera avec la fonction ln.



$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^{0,5} \frac{1}{2-3x} dx \\
 &= \int_0^{0,5} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{-3}{2-3x} dx \\
 &= \left(-\frac{1}{3}\right) [\ln(2-3x)]_{x=0}^{x=0,5} \\
 &= \left(-\frac{1}{3}\right) (\ln(0,5) - \ln(2)) \\
 &= \left(-\frac{1}{3}\right) (-\ln(2) - \ln(2)) \\
 &= \frac{2 \ln(2)}{3}
 \end{aligned}$$

2.1 Notion d'intégrale indéfinie (sans bornes)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives. On note :

$$\int f(x)dx, \tag{20}$$

l'ensemble de toutes les primitives de f sur l'intervalle I .

Donc, si F est une primitive de f sur I :

$$\int f(x)dx = \{x \mapsto F(x) + k | k \in \mathbb{R}\}. \tag{21}$$

Par abus de langage, cette notation désigne aussi une primitive quelconque de f : il faut toutefois bien garder à l'esprit qu'il existe une infinité de primitives définies à une constante additive près.

Exemple :

$$\int 2x \, dx = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Cette écriture signifie que les primitives de la fonction $x \mapsto 2x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2$ à une constante additive réelle C près.

Exercice 3

- On cherche une primitive sur $] -5; +\infty[$ de la fonction $f(x) = \frac{3}{(x+5)^2}$
 - Rappeler la formule donnant la dérivée d'une fonction de la forme $\frac{1}{u^n}$
 - A titre d'exemple, dériver la fonction $G(x) = \frac{1}{x+5}$
 - Écrire $f(x)$ en faisant apparaître la dérivée de G
 - En déduire une primitive F de f sur \mathbb{R}
 - Vérification : $F'(x) = \dots$
- De même sur $] \frac{3}{2}; +\infty[$ avec $f(x) = \frac{5}{(3x-2)^3}$ en faisant apparaître la dérivée de $G(x) = \frac{1}{(3x-2)\dots}$
- De même sur $]1; +\infty[$ avec $f(x) = \frac{x^2}{(5x^3-4)^4}$ en faisant apparaître la dérivée de $G(x) = \dots$

Exercice 4

- Soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} . On demande de trouver la primitive F de f sur \mathbb{R} telle que $F(2) = 3$.
- Soit $f : x \mapsto x^3$ définie sur \mathbb{R} . On demande de trouver la primitive F de f sur \mathbb{R} telle que $F(-2) = 5$.
- Soit $f : x \mapsto (2x-3)^3$ définie sur \mathbb{R} . On demande de trouver la primitive F de f sur \mathbb{R} telle que $F(2) = -4$.
- Soit $f : x \mapsto \frac{x}{(x^2-1)^2}$ définie sur $]1; +\infty[$. On demande de trouver la primitive F de f sur $]1; +\infty[$ telle que $F(2) = -4$.

3 Techniques de calcul intégral

3.1 Primitives et intégrales élémentaires

3.1.1 Primitives de fonctions simples

Dans le tableau suivant, la première colonne est la fonction dont on cherche les primitives, la deuxième est son domaine de définition et la troisième, les primitives de cette fonction sur un intervalle inclus dans ce domaine. C, a, ω, φ désignent des constantes réelles, avec $\omega \neq 0$.

Tableau des primitives simples

$f(x)$	D_D	$F(x)$
a	\mathbb{R}	$ax + C$
$x^a, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	\mathbb{R}^* si $a \in \mathbb{Z}$; \mathbb{R}_+^* sinon	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$\ln x + C$
$\cos(\omega x + \varphi)$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \varphi) + C$
$\sin(\omega x + \varphi)$	\mathbb{R}	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \varphi) + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan x + C$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\cotan x + C$
$\tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan x - x + C$
$a^x (a > 0)$	\mathbb{R}	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	$x(\ln(x) - 1) + C$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$-\ln \cos x + C$
$\sin x \cdot \cos x$	\mathbb{R}	$-\frac{1}{2} \cdot \cos^2 x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$	$\arcsin x + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$	$\arccos x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}	$\arctan x + C$
$\text{ch } x$	\mathbb{R}	$\text{sh } x + C$
$\text{sh } x$	\mathbb{R}	$\text{ch } x + C$
$\frac{1}{\text{ch}^2 x}$	\mathbb{R}	$\text{th } x + C$
$\frac{1}{\text{sh}^2 x}$	\mathbb{R}^*	$-\text{coth } x + C$
$\text{th}^2 x$	\mathbb{R}	$x - \text{th } x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	\mathbb{R}	$\text{argsh } x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1, +\infty[$	$\text{argch } x + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$] -1, 1[$	$\text{argth } x + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$]1, +\infty[$	$\text{argcoth } x + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$] -\infty, -1[$	$\text{argcoth } x + C$

3.1.2 Primitives de fonctions composées

Tableau des primitives composées

$f(x)$	$F(x)$
$\lambda u'$	$\lambda u + C$
$u' + v'$	$u + v + C$
$(v' \circ u) \cdot (u')$	$(v \circ u) + C$
$(u^a) \cdot (u'), \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{a+1}}{a+1} + C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$
$\sin u \cdot u'$	$-\cos u + C$
$e^u \cdot u'$	$e^u + C$

3.1.3 Exercices de primitives et d'intégrales élémentaires

Exercice 5 Calculer les primitives et intégrales suivantes :

- $\int x^5 dx$
- $\int (x + \sqrt{x}) dx$
- $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}) dx$
- $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$
- $\int (\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2) dx$
- $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$
- $\int (x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) dx$
- $\int (x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx$
- $\int_{-5}^4 (3x - 1) dx$
- $\int_1^3 \frac{3}{x^3} dx$
- $\int_0^\pi (2 \sin x + 3 \cos x) dx$
- $\int_1^e (\frac{1}{x} - 2x) dx$
- $\int_4^9 \frac{x-2}{x\sqrt{x}} dx$
- $\int_{-2}^2 (2^x - 2e^x) dx$

Exercice 6 Écrire sans calcul les primitives suivantes.

- $\int_c^x \frac{\ln(t)}{t} dt$; $\int_c^x t e^{t^2} dt$; $\int_c^x \sin(t) e^{\cos(t)} dt$; $\int_c^x e^{t+e^t} dt$;
- $\int_c^x \frac{1}{2 + e^{2t}} dt$; $\int_c^x \frac{\sin(t)}{2 + \cos(t)} dt$; $\int_c^x \frac{1}{2\sqrt{t} + |t|} dt$; $\int_c^x \frac{\arcsin^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$;
- $\int_c^x \frac{\sin(t)}{2 + \cos(t)} dt$; $\int_c^x \frac{\tan(t)}{\cos(t)} dt$; $\int_c^x \frac{1}{\sin(t) \tan(t)} dt$; $\int_c^x \frac{\cos(t)}{\sqrt{1 - \sin^2(t)}} dt$;
- $\int_c^x \tan^3(t) + \tan^5(t) dt$; $\int_c^x 1 + \tan^6(t) dt$; $\int_c^x \frac{1}{\cos^2(t)(3 + \tan(t))} dt$;
- $\int_c^x \frac{2t + 3}{(t^2 + 3t + 5)^2} dt$; $\int_c^x \frac{t + 1}{t^2 + 2t + 5} dt$; $\int_c^x \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 + 2t + 3}} dt$;
- $\int_c^x e^{\sqrt{\sin(t)}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt$; $\int_c^x \frac{\tan(\sqrt{t}) + \tan^3(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt$; $\int_c^x \frac{\sin(e^{-t}) e^{-t + \sqrt{\cos(e^{-t})}}}{\sqrt{\cos(e^{-t})}} dt$;
- $\int_c^x \frac{e^{2t} (\sin(e^{2t}) - \sin^3(e^{2t}))}{(1 + \sqrt{1 + \cos^3(e^{2t}))} \sqrt{1 + \cos^3(e^{2t})}} dt$.

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \int_0^\pi \cos t dt$
- $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t + \frac{\pi}{4}) dt$
- $I_3 = \int_0^1 (t^3 + 2t^2 + 4t + 1) dt$
- $I_4 = \int_{-3}^3 (12t^{17} + 2t^3 - t) dt$
- $I_5 = \int_{-\ln 2}^{\ln 3} (1 - 2e^t) dt$
- $I_6 = \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} dt$

Exercice 8 Déterminer deux primitives sur $]0, +\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{3}{x^2} + \frac{1}{3}x^2$$

$$g : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}$$

Exercice 9 1. Déterminer deux primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}$.

2. Déterminer deux primitives sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto 5(4x-1)^6$ et deux primitives sur $]1, +\infty[$ de $g : x \mapsto \frac{7}{(3x+2)^5}$.

3. Déterminer une primitive sur $] - 1, +\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+5}}$, et une primitive sur $]2, +\infty[$ de $g : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$.

Exercice 10

- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$. Calculer la dérivée de g sur $]0; +\infty[$.
- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Déduire de la première question une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $] - 3, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x+3}$ et F la primitive de f sur $] - 3, +\infty[$ qui s'annule en zéro.

- Étudier les variations de la fonction F sur $] - 3; +\infty[$.
- Étudier le signe de $F(x)$ sur $[-3; +\infty[$.
- Soit g la fonction définie sur $] - 3; +\infty[$ par $g(x) = F(x) - x$.
 - Démontrer que g est décroissante sur $] - 3; +\infty[$.
 - En déduire que : si $x > 0$, alors $F(x) < x$.

Exercice 12 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int te^{t^2} dt$$

$$\int \frac{\ln t}{t} dt$$

$$\int \frac{dt}{t \ln t}$$

Exercice 13 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int \cos t \sin t dt$$

$$\int \tan t dt$$

$$\int \cos^3 t dt$$

Exercice 14 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int \frac{t^2}{1+t^3} dt$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

$$\int \frac{t}{1+t^4} dt$$

Exercice 15 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dt}{it+1}$$

$$\int e^t \cos t dt$$

$$\int t \sin te^t dt$$

Exercice 16 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^2}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 17 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt$$

$$\int_1^2 \ln t \, dt$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \, dt$$

Exercice 18 Pour $m, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt$$

3.2 Primitives et intégration par changement de variable

3.2.1 Intégration par changement de variable : méthode

Soit f une fonction numérique continue, et φ une fonction de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable et dont la dérivée est continue) sur un intervalle $[a, b]$ et dont l'image est contenue dans le domaine de définition de f . Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, du = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx. \quad (22)$$

Preuve

La fonction f étant continue, on considère une primitive F de f sur D l'ensemble de définition de f . La fonction $F \circ \varphi$ est alors dérivable, comme composée de deux fonctions dérivables et on a :

$$(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx &= \int_a^b ((f \circ \varphi) \times \varphi')(x) \, dx \\ &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(x) \, dx \\ &= [F \circ \varphi]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, du \end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a en quelque sorte posé :

$$\begin{cases} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x) dx \end{cases} \quad (23)$$

La borne inférieure $x = a$ dans l'intégrale où la variable est x devient $u = \varphi(x = a) = \varphi(a)$ dans l'intégrale où la variable est u et de même pour la borne supérieure b qui devient $\varphi(b)$.

La formule peut s'appliquer dans les deux sens (cf. exemples 2 et 3 ci-dessous).

Exemples

1. Soit à calculer

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx$$

On pose le changement de variable $u = x^2$ et donc $du = 2x dx$ avec x variant entre $\sqrt{\pi}$ et $2\sqrt{\pi}$. Par conséquent u varie entre π et 4π .

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx = \int_{\pi}^{4\pi} \cos(u) du = [\sin(u)]_{\pi}^{4\pi} = \sin(4\pi) - \sin \pi = 0 - 0 = 0.$$

2. Soit à calculer :

$$I = \int_{1/3}^{1/2} x \sqrt{1-x^2} dx$$

Posons :

$$\begin{cases} u = \varphi(x) = x^2 \\ du = \varphi'(x) dx = 2x dx \end{cases} \quad (24)$$

Si $a = 1/3$, $u = \varphi(1/3) = 1/9$ et si $a = 1/2$, $u = \varphi(1/2) = 1/4$ donc l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{1/9}^{1/4} (1-u)^{1/2} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} [(1-u)^{3/2}]_{1/9}^{1/4} \\ &= -\frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{3/2} \right\} \\ &= -\frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{8}{9}\right)^{3/2} \right\} \\ &= \dots \\ &= \frac{16}{81} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

3. Soit à calculer :

$$I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx$$

Posons :

$$\begin{cases} x = \sin t = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt = \cos t dt \end{cases} \quad (25)$$

Si $x = 1/2$, $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$. Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi(\pi/6)}^{\varphi(\pi/3)} \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1-(\varphi(t))^2} \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos t \sqrt{1-\sin^2 t} dt \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos t |\cos t| dt \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 t dt \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \right) + \frac{1}{4} \left(\sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

3.2.2 Recherche de primitive par changement de variables

Cette méthode est basée sur la formule de dérivation des fonctions composées :

$$(G \circ h)' = G' \circ h.h'$$

Donc on a :

$$\int (G' \circ h)(x).h'(x)dx = (G \circ h)(x). \tag{26}$$

Deux cas peuvent se produire :

- la fonction f à intégrer, s'écrit sous la forme $g \circ h.h'$. Dans ce cas on effectue le changement de variable $t = h(x)$, on calcule une primitive G de la fonction g , alors, la fonction $G \circ h$ est une primitive de f .
- on veut faire un changement de variable du type $x = k(t)$, pour ramener le calcul des primitives de f à celui des primitives de $f \circ k.k'$.

Il faut alors faire attention au domaine de définition de k , et le choisir de telle sorte que k soit bijective, de manière à pouvoir écrire $t = k^{-1}(x)$, ce qui permettra de revenir en x à la fin du calcul. Si G est une primitive de $f \circ k.k'$, on aura alors

$$F = G \circ k^{-1} \tag{27}$$

On a donc la proposition suivante :

Soit f définie sur J ; on suppose que φ est de classe \mathcal{C}^1 et réalise une bijection de $I \rightarrow J$; alors :

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(on a donc posé $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, $t = \varphi^{-1}(x)$),
 en ce sens que, si G est une primitive sur J de la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ et si F est une primitive de f , on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad F(x) &= G(t) + C \\ &= G(\varphi^{-1}(x)) + C \end{aligned}$$

Preuve

Lorsqu'on dérive par rapport à x l'expression :

$$H(x) = G(\varphi^{-1}(x))$$

on obtient :

$$\begin{aligned} H'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x)).(\varphi^{-1})'(x) && \text{(par la règle de dérivation d'une fonction composée)} \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x)).(\varphi^{-1})'(x) \\ &\quad \text{(car G est une primitive de la fonction : } t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t) \text{ ici calculée en } t = \varphi^{-1}(x)) \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} && \text{(par la règle de la dérivée de la fonction réciproque)} \\ &= f(x) \end{aligned} \tag{28}$$

donc H est bien une primitive de f sur J

3.2.3 Exercices

Exercice 19 Déterminer les primitives suivantes en procédant par un changement de variable adéquat

$$\begin{aligned} &\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} \\ &\int \frac{\ln t dt}{t + t(\ln t)^2} \\ &\int \frac{e^{2t} dt}{e^t + 1} \end{aligned}$$

Exercice 20 Déterminer :

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$$

Exercice 21 Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

$$\int_1^e \frac{dt}{t+t(\ln t)^2}$$

$$\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$$

Exercice 22 Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$$

Exercice 23

a) Observer

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\pi/4} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right) dt$$

b) En déduire

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t) dt$$

Exercice 24

a) Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}$$

b) En déduire

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$$

Exercice 25 Calculer les intégrales suivantes :

- $\int \frac{x}{1+x^2} dx$
- $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$
- $\int \frac{x}{1+x^4} dx$
- $\int \sin 3x dx$
- $\int \frac{1}{x+2} dx$
- $\int (x+2)^3 dx$
- $\int \frac{\ln x}{x} dx$
- $\int \sin x \cos^3 x dx$
- $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx$
- $\int e^{\sin x} \cos x dx$
- $\int t^2 \sin(t^3+1) dt$
- $\int \frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t} dt$
- $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
- $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2} dx$
- $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^3} dx$
- $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{4x^2+9} dx$
- $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$
- $\int_{-1}^0 x e^{-x^2/2} dx$
- $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+1} dx$
- $\int_0^{\pi/9} \tan 3x \ln(\cos 3x) dx$

3.2.4 Nouvelles primitives "élémentaires"

Soit à calculer les primitives du type :

$$I_{\pm} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Un changement de variable judicieux permet de calculer ces primitives.

- Calcul de I_+

Posons :

$$\begin{cases} x = |a| \sinh u \\ dx = |a| \cosh u du \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I_+ = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{dx}{|a| \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{|a|}{|a|} \int \frac{\cosh u du}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} = \int \frac{\cosh u}{\cosh u} du \\ &= u + C = \operatorname{Argsh} \frac{x}{|a|} + C \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C \end{aligned} \quad (29)$$

- Calcul de I_-

De la même manière, posons :

$$\begin{cases} x = |a| \cosh u \\ dx = |a| \sinh u du \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I_- = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{dx}{|a| \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} \\ &= \frac{|a|}{|a|} \int \frac{\sinh u du}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}} = \int \frac{\sinh u}{|\sinh u|} du \\ &= \int \frac{u}{|u|} du = |u| + C = \left| \operatorname{Argch} \frac{x}{|a|} \right| + C \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C \end{aligned} \quad (30)$$

3.3 Primitives et intégration par parties

3.3.1 Théorème d'intégration par parties

L'intégration par parties est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul.

La formule-type est la suivante, où u et v sont deux fonctions dérivables, de dérivées continues et a et b deux réels de leur intervalle de définition :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \quad (31)$$

ou encore, en remarquant que $u'(x)dx$ et $v'(x)dx$ sont respectivement les différentielles de u et de v :

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du. \quad (32)$$

En notant $w = v'$ et $W = v$, l'énoncé ci-dessus correspond au suivant.

Théorème 3.1 Théorème d'intégration par parties

Soit $I = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} , w une fonction continue définie sur I et u une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur I . Soit W une primitive de w sur I . Alors :

$$\int_a^b u(x)w(x) \, dx = [u(x)W(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)W(x) \, dx. \quad (33)$$

On peut étendre ce théorème aux fonctions continues et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur le segment d'intégration (mais la continuité est indispensable).

Preuve

La démonstration du théorème découle directement de la règle du produit :

$$(u \cdot W)' = u' \cdot W + u \cdot w.$$

On a donc

$$u \cdot w = (u \cdot W)' - u' \cdot W$$

puis :

$$\int_a^b u(x)w(x) \, dx = \int_a^b (u \cdot W)'(x) \, dx - \int_a^b u'(x)W(x) \, dx,$$

ce qui donne bien la propriété énoncée ci-dessus.

Dans un calcul de primitives, on a aussi :

$$\int u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)] - \int u'(x)v(x)dx \quad (34)$$

Exemples :

1. effectuons le calcul de : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x) \, dx$ grâce à une intégration par parties.

Pour cela, posons $u(x) = x$, de telle sorte que $u' = 1$, et $v' = \cos$, de telle sorte que $v = \sin$, par exemple (i.e. à une constante additive près, qui de toutes façons disparaîtrait au cours des calculs intermédiaires).

Il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x) \, dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} u'(x)v(x) \, dx \quad (35)$$

$$= [x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) \, dx \quad (36)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} \quad (37)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}. \quad (38)$$

2. effectuons le calcul de $\int_a^b xe^x \, dx$.

Pour l'intégration par parties, posons $u(x) = x$ et $dv = e^x dx$. Nous avons donc $du = dx$ et (par exemple) $v = e^x$.

Utilisons la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b xe^x \, dx = [xe^x]_a^b - \int_a^b e^x \, dx = [xe^x - e^x]_a^b.$$

On en déduit qu'une primitive (sur \mathbb{R}) de la fonction $x \rightarrow xe^x$ est la fonction $x \rightarrow (x - 1)e^x$.

3. recherchons une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction \ln :

Posons :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = x \end{cases}$$

et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

4. recherchons une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \sin x$:

Posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$$

et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

L'intégration par parties 34 peut être utilisée pour un calcul direct de $\int u(x).v'(x)dx$, en l'employant au besoin plusieurs fois de suite.

Exemple :

$$\int P(x)e^x dx \tag{39}$$

où P est un polynôme.

On obtient par exemple :

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (n \in \mathbb{Z} / \{-1\})$$

ou encore, si P une fonction polynôme quelconque et qu'on note P' sa fonction dérivée :

$$\int P(x)e^{ax} dx = \frac{1}{a} P(x)e^{ax} - \frac{1}{a} \int P'(x)e^{ax} dx$$

L'intégration par parties peut fournir une relation de récurrence permettant de calculer de proche en proche des intégrales dépendant d'un paramètre.

Exemple :

$$\int \cos^{2n} x dx$$

Il se peut aussi qu'après plusieurs intégrations par parties on retombe sur l'intégrale de départ affectée d'un autre coefficient, ce qui permet de la calculer.

Exemple :

$$\int e^x \cos x dx$$

3.3.2 Exercices

Exercice 26 Déterminer les primitives et calculer les intégrales suivantes :

- $\int x^2 e^x dx$
- $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
- $\int x(3x - 2)^7 dx$
- $\int \ln^2 x dx$
- $\int x \ln x dx$
- $\int x^2 \sin 3x dx$
- $\int e^x \sin x dx$
- $\int \sin 2x \sin 3x dx$
- $\int_1^2 x \sqrt{1+x} dx$
- $\int_{-1}^1 (x+1)^2 e^{-2x} dx$
- $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$

Exercice 27 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int t \ln t dt$$

$$\int t \arctan t dt$$

$$\int t \sin^3 t dt$$

Exercice 28 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int (t^2 - t + 1)e^{-t} dt$$

$$\int (t - 1) \sin t dt$$

$$\int (t + 1) \operatorname{ch} t dt$$

Exercice 29 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$$

$$\int_1^e t^n \ln t dt \text{ (avec } n \in \mathbb{N})$$

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$$

Exercice 30 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 \arctan t dt$$

$$\int_0^{1/2} \arcsin t dt$$

$$\int_0^1 t \arctan t dt$$

Exercice 31 Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \operatorname{Arctan} x dx \quad ; \quad \int (x^2 + x + 1)e^x dx.$$

Exercice 32 Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \operatorname{Arctan} x dx \quad ; \quad \int (x^2 + x + 1)e^x dx.$$

Exercice 33 Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
2. Calculer I_n .
3. En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 34 Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1} .
3. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer $nI_n I_{n+1}$.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n .

Exercice 35 Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

Exercice 36 Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e \log(u)^n du.$$

Exercice 37 Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x dx$
2. $\int x \arctan x dx$
3. $\int \ln x dx$ puis $\int (\ln x)^2 dx$
4. $\int \cos x \exp x dx$

Exercice 38 Voici quelques calculs de primitives utilisant l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} \int_c^x t \sin t dt &= \sin x - x \cos x + C. \\ \int_c^x \arcsin t dt &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \\ \int_c^x \arctan t dt &= x \arctan x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C. \\ \int_c^x (t^2+1) \arctan t dt &= -\frac{1}{6}x^2 + x \arctan x + \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \ln(x^2+1) + C. \\ \int_c^x t^n \ln t dt &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C. \\ \int_c^x (x^2+2x)e^{3x} dx &= e^{3x} \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{4}{27} \right) + C. \end{aligned}$$

Exercice 39 Calculer les primitives suivantes, en utilisant l'intégration par parties.

- $\int_c^x t e^t dt$; $\int_c^x t^2 e^t dt$; $\int_c^x t^3 e^t dt$;
- $\int_c^x t \ln(t) dt$; $\int_c^x t^2 \ln(t) dt$; $\int_c^x t^3 \ln(t) dt$;

- $\int_c^x t \sin(t) dt$; $\int_c^x t^2 \sin(t) dt$; $\int_c^x t^3 \sin(t) dt$;
- $\int_c^x t \cos(t) dt$; $\int_c^x t^2 \cos(t) dt$; $\int_c^x t^3 \cos(t) dt$;
- $\int_c^x \arcsin(t) dt$; $\int_c^x t \arcsin(t) dt$; $\int_c^x \arctan(t) dt$;
- $\int_c^x (t^2 + 1) \arctan(t) dt$; $\int_c^x (t^2 + 2t)e^{3t} dt$; $\int_c^x (t + 1) \arcsin(t) dt$.

4 Applications du calcul intégral : longueurs, aires et volumes

4.1 Calculs d'aires remarquables

Exercice 40 Construire la courbe paramétrée $C \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1+\lambda \cos t} \\ y = \frac{\sin t}{1+\lambda \cos t} \end{cases}$ où λ est un paramètre appartenant à $[0, 1[$. Calculer l'aire S limitée par C de deux façons :

- En se ramenant au calcul de $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\lambda \cos t)^2}$.
- En reconnaissant la nature géométrique de C .

Exercice 41 Calculer $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ (on posera $\theta = \arcsin \frac{x}{R}$) et en déduire l'aire d'un disque de rayon R .

Exercice 42 Calculer l'aire intérieure d'une ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

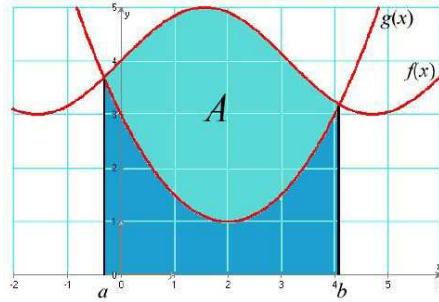
Indications. On pourra calculer seulement la partie de l'ellipse correspondant à $x \geq 0, y \geq 0$. Puis exprimer y en fonction de x . Enfin calculer une intégrale.

Exercice 43

- Soit l'ellipse $E \equiv 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$. Calculer l'aire de la surface de cette ellipse comprise entre les droites verticales contenant ses foyers.
- Calculer l'aire de l'ellipse $E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ comprise entre les droites d'équation $x = -\frac{a}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$.
- Calculer l'aire du cercle $C \equiv x^2 + y^2 = r^2$ comprise entre les droites d'équation $x = -\frac{r}{2}$ et $x = \frac{r}{2}$.
- Soit $f(x) = x.e^x$. Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et les droites verticales comprenant respectivement le minimum et le point d'inflexion de cette fonction.
- Soit $f(x) = x.e^{-x^2}$. Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et la droite verticale comprenant le maximum de cette fonction.
- Soit $E \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Calculer l'aire comprise entre cette ellipse et les droites verticales comprenant les foyers.

4.2 Aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$, pour $a \leq x \leq b$. Calculons l'aire A du domaine délimité par ces deux courbes.



Si g est positive ($g \geq 0$) dans l'intervalle $[a, b]$, alors :

$$A = \ll \text{aire sous } f \gg - \ll \text{aire sous } g \gg$$

donc

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (40)$$

Cette formule est aussi valable quand les fonctions ne sont pas partout positives. En effet, si g prend des valeurs négatives dans l'intervalle $[a, b]$, on translate les deux courbes verticalement vers le haut de sorte que la fonction g soit partout positive ou nulle. Il s'agit donc de trouver le minimum m de g sur $[a, b]$, puis de soustraire m (car $m < 0$) à $f(x)$ et à $g(x)$. Puisque les deux courbes sont translattées de la même façon, il est clair que l'aire entre les deux courbes ne va pas changer. On a alors :

$$A = \int_a^b [(f(x) - m) - (g(x) - m)] dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (41)$$

Exercice 44

- On donne les fonctions f et g . Calculez l'aire du domaine borné délimité par les deux fonctions.
 - $f(x) = x^2$ et $g(x) = 8 - x^2$
 - $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = x^2 - x + 6$
 - $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ et $g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$
 - $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ et $g(x) = \sqrt{2x}$
- Calculez l'aire du domaine compris entre les courbes des fonctions f et g et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.
 - $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$, $a = -1$, $b = 2$
 - $f(x) = x^3$, $g(x) = x$, $a = 0$, $b = 2$
- Calculez l'aire du domaine compris entre les courbes $y = x$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, et les droites horizontales $y = 1$ et $y = 2$.

Exercice 45 Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = \frac{1}{1+x^2}$.

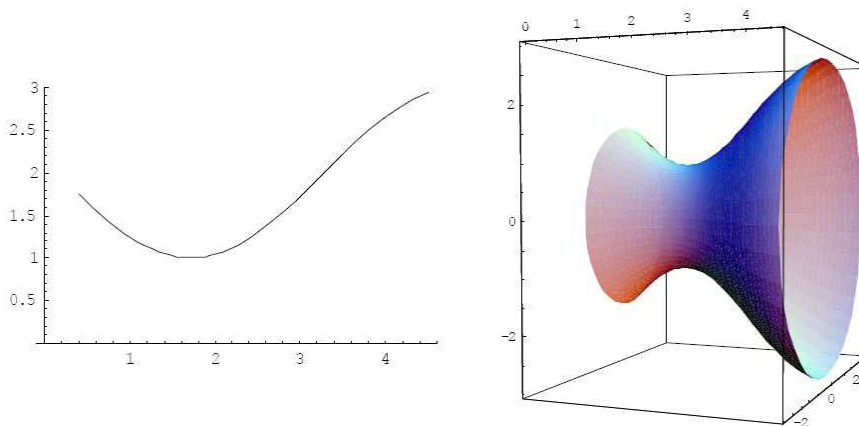
Exercice 46 Représenter et calculer l'aire comprise entre les graphes de f et g :

- $f(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x - 5)$ et $g(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$
- $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = -x + 2$ et $g(x) = x^2 - 4$
- $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = 3$
- $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ et entre les droites $x = 1$ et $x = 2$

4.3 Volume d'un solide de révolution

4.3.1 Méthode des disques

Soit f une fonction continue et non négative sur l'intervalle $[a, b]$. Trouvons le volume V du solide généré par la révolution autour de l'axe Ox de la portion de courbe $y = f(x)$ comprise entre $x = a$ et $x = b$.



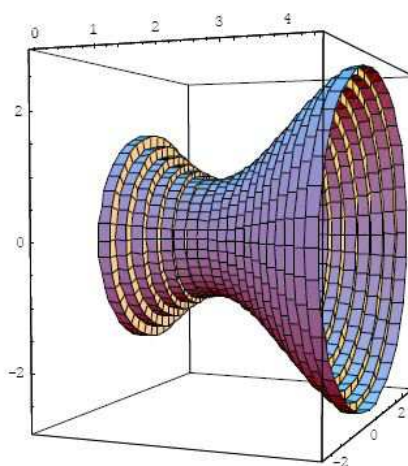
Volume de révolution obtenu en faisant tourner la courbe de gauche autour de l'axe Ox

L'idée est la même que lorsque l'on cherchait l'aire sous une courbe. On va découper l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même largeur $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$. La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle $[a, b]$ divisée par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire : $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Pour chaque $i = 0, 1, \dots, n - 1$, on dessine un rectangle ayant comme base le segment $x_i x_{i+1}$ et comme hauteur $f(x_i)$. Lorsqu'ils tourneront autour de l'axe Ox , chacun de ces rectangles va définir un cylindre très fin (presque un disque) de volume $\pi [f(x_i)]^2 \Delta x$. Le volume du corps de révolution sera la somme de tous ces cylindres :

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \Delta x \tag{42}$$

qui n'est rien d'autre que l'intégrale définie :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \tag{43}$$



Volume de révolution approché par une série de cylindres

Exercice 47

- Calculez le volume des solides générés par la révolution autour de l'axe Ox des courbes suivantes et donnez le nom (quand ils en ont un) de ces solides :

- $y = 4 \quad -1 \leq x \leq 3$
- $y = 3x \quad 0 \leq x \leq 2$
- $y = x + 1 \quad 0 \leq x \leq 3$
- $y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad -R \leq x \leq R$
- $y = \sqrt{3 - x} \quad x \geq -1$
- $y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 2$

- Donnez la formule permettant de trouver le volume engendré par une révolution autour de l'axe Oy , puis calculez le volume du solide généré par la révolution autour de l'axe Oy de la courbe : $y = x^3, 0 \leq y \leq l$.
- Trouvez le volume du corps engendré par la révolution autour de l'axe Oy de la courbe $x = \sqrt{l + y}, y \leq 3$.

Exercice 48

- Montrez que le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h vaut $\frac{\pi r^2 h}{3}$.
- Montrez que le volume d'un tronc de cône de hauteur h et dont les rayons respectifs de la petite et la grande base sont r et R vaut $\frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + rR + r^2)$.
- Montrez que le volume de la sphère de rayon R vaut $\frac{4}{3}\pi R^3$.
- Montrez que le volume de l'ellipsoïde de révolution, engendré par la rotation de l'ellipse $E \equiv x \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour de l'axe des x vaut $\frac{4}{3}\pi ab^2$.
- Montrez que le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x de l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ limité par l'origine et la droite d'équation $x = a$ vaut $\pi pa^2 = \frac{1}{2}\pi ab^2$ si $b = \sqrt{2pa}$ ce qui montre que le volume du parabolôïde de révolution vaut la moitié du volume du cylindre de même base et de même hauteur.
- Montrez que le volume du tore engendré par la rotation autour de l'axe des x d'un cercle de rayon r et de centre $(0, R)$ vaut $2\pi^2 Rr^2$.

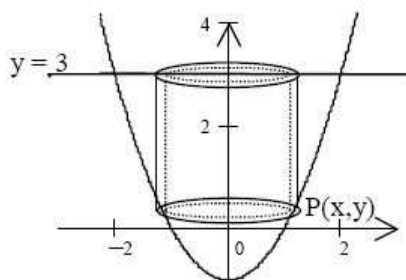
Exercice 49

- Calculer le volume d'un cône de révolution engendré par la rotation autour de l'axe x de la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$. Le cône est limité par l'origine et a pour hauteur h .
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x du quadrilatère $ABCD$ si $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (3, 2)$ et $D = (3, 0)$.
- Calculer en fonction de a et b le volume de l'ellipsoïde de révolution compris entre les plans perpendiculaires à l'axe focal comprenant les points $(-\frac{a}{2}, 0)$ et $(\frac{a}{2}, 0)$ de l'ellipse génératrice d'équation $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.
- Calculer le volume du segment sphérique d'une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, compris entre les plans perpendiculaires à Ox aux points d'abscisse 0 et $\frac{r}{2}$.
- Calculer en fonction de a et b le volume de l'hyperboloïde de révolution compris entre les plans perpendiculaires à l'axe focal, comprenant les points $(a, 0)$ et $(2a, 0)$ de l'hyperbole génératrice d'équation $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la surface limitée par le graphe de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = 2a$ ($a > 0$).
- Calculer le volume engendré par le cercle $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ dans sa rotation autour de l'axe Ox .
- Calculer le volume engendré dans sa rotation autour de l'axe Ox par la surface comprise entre les graphes de $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $g(x) = \frac{1}{4}(x+7)$.
- Considérons la surface limitée par la parabole $\mathcal{P} \equiv y = 4 - x^2$ et la droite $y = 2$. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de la droite $y = 2$.

- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface limitée par la courbe $y = x^2 - 1$ et la droite $y = 2$.
- – Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la parabole $\mathcal{P} \equiv y^2 = 8x$ et la droite $\mathcal{D} \equiv x = 2$.
– Calculer le volume engendré par la rotation autour de la droite \mathcal{D} de cette surface.
- Calculer le volume engendré par la rotation de la surface limitée par $y = x^3$ et $y = 8$ et l'axe des ordonnées :
 - autour de l'axe des x
 - autour de la droite $\mathcal{D} \equiv x = 2$
- Calculer le volume engendré par la rotation de la surface limitée par les courbes $x = 9 - y^2$ et $x - y = y$:
 - autour de l'axe des ordonnées
 - autour de la droite $\mathcal{D} \equiv x = 2$
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface comprise entre la parabole $y = -x^2 - 3x + 10$ et la droite $y = 7 - x$.

4.3.2 Méthode des tubes

Nous introduisons le principe de la méthode à partir d'un exemple. Soit à calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface limitée par la parabole $y = x^2 - 1$ et la droite $y = 3$.



On peut considérer ce volume comme la somme d'une infinité de "tubes" de rayon r , d'épaisseur dx et de hauteur $3 - y$.

En approximant le volume de ce tube par celui d'un parallélépipède rectangle de longueur $2\pi x$, de hauteur $3 - y = 3 - x^2 + 1 = 4 - x^2$ et d'épaisseur dx , nous avons donc :

$$V = \int_0^2 2\pi x(4 - x^2)dx = \int_0^2 2\pi(4x - x^3)dx = 2\pi \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \left[8 - \frac{16}{4} \right] = 8\pi$$

Exercice 50

- Soit la surface limitée par la parabole $y^2 = 8x$ et par la droite $x = 2$. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe des ordonnées.
- Soit la surface limitée par la parabole $y^2 = 8x$ et par la droite $x = 2$. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de la droite $x = 2$.
- Calculer le volume du tore engendré par la rotation du cercle $x^2 + y^2 = 4$ autour de la droite $x = 3$.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface limitée par la parabole $y = 2x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 5$.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de la droite d'équation $x = 6$ de la surface limitée par la parabole $y = 2x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 5$.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de la droite $y = 8$ de la surface limitée par la courbe $y = x^3$, l'axe des x et la droite $x = 2$.

4.4 Longueur d'une courbe plane

Définition préalable

Une fonction est lisse sur un intervalle si sa dérivée est continue sur cet intervalle.

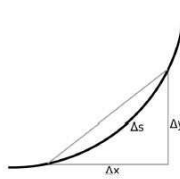
Soit f une fonction lisse dans l'intervalle $[a, b]$. Trouvons la longueur L de la courbe $y = f(x)$ de a à b .

L'idée consiste à découper l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ de largeur Δx . On pose évidemment $x_0 = a$ et $x_n = b$. On relie ensuite par une ligne polygonale les points P_0, P_1, \dots, P_n .



On obtiendra une bonne approximation de la longueur de la courbe en additionnant les longueurs L_k des n différents segments, pour $k = 1, \dots, n$.

Regardons un segment.



Le théorème de Pythagore nous donne facilement sa longueur Δs :

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\Delta s = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \cdot \Delta x = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \cdot \Delta x$$

Si l'on regarde de segment $[x_{k-1}, x_k]$, on peut écrire :

$$L_k = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k) \quad \text{où } x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

Par conséquent,

$$L_k = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x$$

Donc, la longueur de la ligne polygonale est

$$L = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x$$

Si nous augmentons maintenant le nombre de sous-intervalles de sorte que $\Delta x \rightarrow 0$, alors la longueur de la courbe polygonale va approcher la longueur de la courbe $y = f(x)$. Par définition, ce n'est rien d'autre que l'intégrale définie suivante :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (44)$$

Exercice 51

- Calculez la longueur de la courbe $y = 2x$ entre les points $(1, 2)$ et $(2, 4)$ en utilisant la formule ci-dessus, puis vérifiez votre réponse à l'aide du théorème de Pythagore.

- Calculez la longueur de la courbe $y = x^{\frac{3}{2}} - 1$ de $x = 0$ à $x = 1$.
- Calculez la longueur de la courbe $y = x^{\frac{2}{3}}$ de $x = 1$ à $x = 8$. Pourquoi ne peut-on pas utiliser telle quelle la formule pour calculer la longueur de cette courbe entre -1 et 8? Donnez un moyen de s'en sortir.
- Calculez la longueur de la courbe $y = \sqrt{1 - x^2}$ de $x = 0$ à $x = 1$.

Exercice 52

- Calculer la longueur du cercle de rayon R (par symétrie, on peut se limiter à la longueur du quart de cercle).
- Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \sqrt{x^3}$ entre les points $x = 0$ et $x = 5$.
- Calculer la longueur de l'arc de chaînette $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ de $x = 0$ à $x = a$.
- Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y^3 = 8x^2$ de $x = 1$ à $x = 8$.
- Calculer la longueur de l'arc de la courbe $6xy = x^4 + 3$ de $x = 1$ à $x = 2$.
- Calculer la longueur de l'arc de parabole $y^2 = 12x$ limité par la droite $x = 3$.

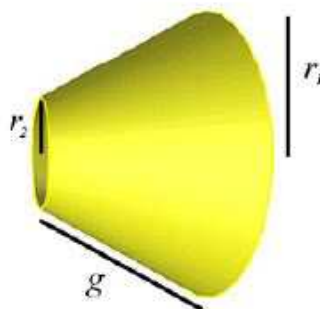
Exercice 53

Calculer la longueur des arcs de courbe suivants.

1. $y = \ln(1 - x^2)$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
2. $y = x^{3/2}$ pour $0 \leq x \leq 5$
3. $y = \ln(x)$ pour $1 \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

4.5 Aire d'une surface de révolution

Soit f une fonction lisse et non négative sur l'intervalle $[a, b]$. Trouvons l'aire de la surface générée par la révolution autour de l'axe Ox de la portion de courbe $y = f(x)$ comprise entre $x = a$ et $x = b$. L'idée est un peu la même que pour calculer la longueur d'une courbe : on va approcher la courbe par une ligne polygonale. En faisant tourner cette ligne polygonale autour de l'axe Ox , la surface obtenue sera composée de troncs de cônes circulaires droits mis bout à bout.



Si r_1 est le rayon du grand cercle de base, r_2 le rayon du petit et g la longueur d'une génératrice du tronc de cône, son aire latérale vaut :

$$A_{c\grave{o}ne} = \pi(r_1 + r_2).g$$

Reprenons notre surface de révolution dont on veut connaître l'aire. Coupons-la en tranches de largeur Δx , comme le ferait un boucher avec un jambon. Ces tranches sont « à peu près » des cônes tronqués. L'aire latérale du tronc de cône numéro k est :

$$A_k = 2\pi.f(m_k).L_k$$

avec m_k compris entre x_{k-1} et x_k et tel que $f(m_k) = \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$ (le théorème de la valeur intermédiaire nous assure que m_k existe).

Lors des calculs de la longueur d'une courbe du paragraphe précédent, nous avons calculé que :

$$L_k = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x,$$

donc :

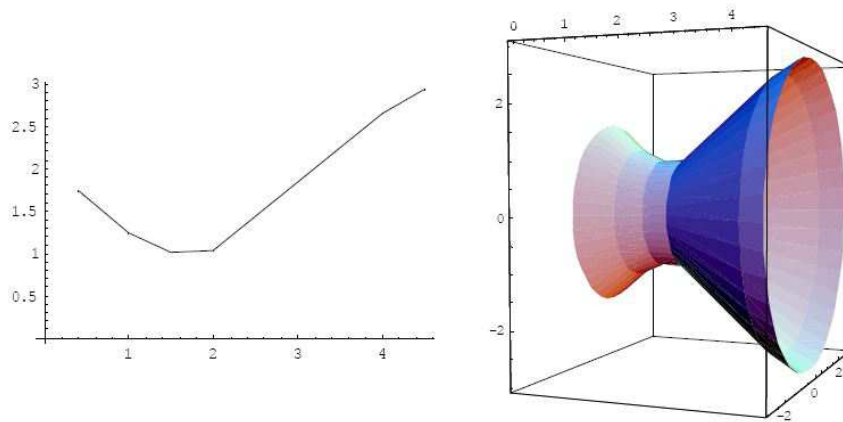
$$A_k = 2\pi \cdot f(m_k) \cdot \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x$$

L'aire de la surface totale est la somme :

$$A = \sum_{k=1}^n 2\pi \cdot f(m_k) \cdot \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta x$$

Quand on augmente le nombre de segments, leur longueur diminue, et forcément ξ se rapproche de m . Si on suppose qu'à la limite ces points sont confondus (ce qui est le cas car f et f' sont continues), on trouve l'intégrale suivante :

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx \tag{45}$$



Surface de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe Ox la ligne polygonale approchant la courbe

De manière analogue, pour une fonction exprimée sous la forme $x = g(y)$, avec $g'(y)$ continue sur l'intervalle $[c, d]$ et $g(y) \geq 0$ pour $c \leq y \leq d$, l'aire de la surface générée par la révolution de $g(y)$ autour de l'axe Oy est donnée par la formule :

$$A = 2\pi \int_c^d g(y) \cdot \sqrt{1 + [g'(y)]^2} \cdot dy \tag{46}$$

Exercice 54

Trouver l'aire des surfaces engendrées par la rotation des arcs de courbes suivants

1. $4y = x^3$ pour $0 \leq x \leq 1$, autour de Ox
2. $y^2 + 4x = 2 \ln(y)$ pour $1 \leq y \leq 3$ autour de Oy .

Exercice 55

- Trouvez l'aire de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe Ox des courbes suivantes :

- $y = \sqrt{1 - x^3} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
- $y = 7x \quad 0 \leq x \leq 1$
- $y = \sqrt{4 - x^2} \quad -1 \leq x \leq 1$

- Trouvez l'aire de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe Oy des courbes suivantes :

- $x = 9y + 1 \quad 0 \leq y \leq 2$
- $x = \sqrt{9 - y^2} \quad -2 \leq y \leq 2$
- $y = \sqrt[3]{3x} \quad 0 \leq y \leq 2$

4.6 Exercices divers

Exercice 56 On appelle *tore* la figure obtenue par révolution d'un cercle de rayon r autour d'une droite de son plan passant à distance R de son centre (on suppose $r < R$). Calculer l'aire A du tore, et son volume V .

Exercice 57 On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R , lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur une droite en restant dans plan fixe. Montrer que dans un repère bien choisi, la cycloïde admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$ Représenter la cycloïde et calculer : la longueur L d'une arche, l'aire A de la surface S comprise entre cette arche et la droite fixe (Ox), les volumes V_1 et V_2 obtenus par révolution de S autour de Ox et Oy respectivement, les aires A_1 et A_2 obtenues par révolution d'une arche de la cycloïde autour de Ox et Oy respectivement.

Exercice 58 On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r , lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur un cercle de rayon R en restant tangent extérieurement à ce dernier, et dans son plan. On pose $n = R/r$. Montrer que dans un repère que l'on précisera, l'épicycloïde admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = r((n+1)\cos t - \cos(n+1)t) \\ y = r((n+1)\sin t - \sin(n+1)t) \end{cases}$$

Représenter la courbe pour $n = 1, 2, 3$. En supposant n entier, calculer la longueur L de la courbe et l'aire A limitée par celle-ci. Dans le cas $n = 1$ (*cardioïde*), calculer de plus l'aire S de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe autour de son axe de symétrie, ainsi que le volume V limitée par cette surface.

Exercice 59 Soit C un cercle fixe de rayon R . Un cercle C' de même rayon roule sans glisser sur C en restant dans un plan (variable) perpendiculaire à celui de C . Un point M lié au cercle C' décrit une courbe Γ . Montrer que suivant un repère convenablement choisi, Γ admet la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = R(\cos t + \sin^2 t) \\ y = R \sin t(1 - \cos t) \\ z = R(1 - \cos t) \end{cases}$.

En déduire la longueur L de Γ . Représenter les projections de Γ sur chacun des trois plans de coordonnées.