Chapitre 1 : séries numériques et séries de fonctions

1 Introduction

Les **suites** sont un des outils les plus puissants et les plus fréquemment utilisés en mathématiques. On en trouve déjà dans les mathématiques babyloniennes ou en Égypte, puis chez Archimède et Héron d'Alexandrie, avant un grand retour à partir du XVII$^{\text{ieme}}$ siècle. Il s'agit d'une famille d'éléments indexée par des nombres entiers naturels, qu'on note classiquement (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les suites les plus connues comprennent la suite de Fibonacci, celle de Lucas ou celle de Syracuse.

Le terme de **série** est quant à lui une extension de la notion de suite. On s'intéresse non plus aux termes de la suite, mais à la somme de ces termes.

2 Suites numériques

2.1 Définition

En mathématiques, une **suite** est donc une famille d'éléments — appelés ses « termes » — indexée par les entiers naturels. Une suite finie est une famille indexée par les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à un certain entier, ce dernier étant appelé « longueur » de la suite.
Lorsque tous les éléments d'une suite (infinie) appartiennent à un même ensemble E, cette suite peut être assimilée à une application de $\mathbb{N}$ dans E . On note classiquement une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou en abrégé : (u_n).
En particulier, on parle de suite « entière », suite « réelle » et suite « complexe », quand E est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, respectivement.

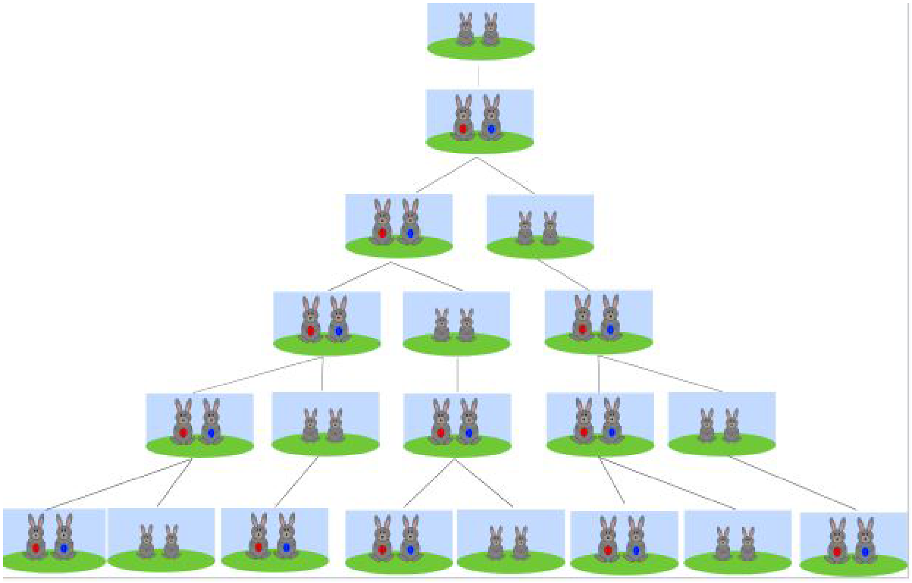
2.2 Exemples

- *Suite arithmétique*
  C'est une suite définie par récurrence par :
  $$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$
  où r est une constante appelée *raison* de la suite. Son terme général est alors :
  $$u_n = a + (n - n_0)r.$$
  Par exemple, si $a = 0$ et $r = 1$, la suite arithmétique a pour termes les entiers naturels. Si $a = 1$ et $r = 2$, la suite a pour termes les entiers naturels impairs.

- *Suite géométrique*
  C'est une suite définie par récurrence par :
  $$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$
  où q est une constante appelée *raison* de la suite. Son terme général est alors :
  $$u_n = aq^{n-n_0}.$$
  Par exemple, si $a = 1$ et $q = 10$, la suite a pour termes les puissances de 10.

- *Suite de Fibonacci*
  La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (parfois 1 et 1) et ses premiers termes sont : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.

  Elle doit son nom à Leonardo Fibonacci qui, dans un problème récréatif posé dans l'ouvrage Liber abaci publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »



  Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n ième mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

  - au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
  - les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
  - chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
  - les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est croissante).

  Notons $\mathcal{F}_n$ le nombre de couples de lapins au début du mois n. Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce qu'on note : $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 1$.

  Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins ; on note alors $\mathcal{F}_3 = 2$.

  Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois $n+2$: $\mathcal{F}_{n+2}$ désigne la somme des couples de lapins au mois $n+1$ et des couples nouvellement engendrés.

  Or, n'engendrent au mois $n+2$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc, pour tout entier n strictement positif :

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$

  On choisit alors de poser $\mathcal{F}_0 = 0$, de manière que cette équation soit encore vérifiée pour $n = 0$.

  On obtient ainsi la forme récurrente de la suite de Fibonacci : chaque terme de cette suite est la somme des deux termes précédents ; pour obtenir chacun de ces deux termes, il faut faire la somme de leurs termes

précédents et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces deux termes soient les deux termes initiaux, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_0$, qui sont connus.
Les termes de cette suite sont appelés nombres de Fibonacci :

$\mathcal{F}_0$	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_8$	$\mathcal{F}_9$	$\mathcal{F}_{10}$	$\mathcal{F}_{11}$	$\mathcal{F}_{12}$	$\mathcal{F}_{13}$	$\mathcal{F}_{14}$	$\mathcal{F}_{15}$	$\mathcal{F}_{16}$	$\mathcal{F}_{17}$	$\mathcal{F}_{18}$	$\mathcal{F}_{19}$	$\mathcal{F}_{20}$	$\mathcal{F}_{21}$	$\mathcal{F}_{22}$	$\mathcal{F}_{23}$	$\mathcal{F}_{24}$	$\mathcal{F}_{25}$	...	$\mathcal{F}_n$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368	75025	...	$\mathcal{F}_{n-1}+\mathcal{F}_{n-2}$

Cette suite est fortement liée au nombre d'or, φ. Ce nombre intervient dans l'expression du terme général de la suite. On montre en effet :

$$\boxed{\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n), \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi' = -\frac{1}{\varphi}.}$$

2.3 Limite finie de suite

Intuitivement, une suite possède une (valeur) limite si ses points se rapprochent toujours plus de cette limite lorsque l'indice augmente indéfiniment.

2.3.1 Définition

- *Suite réelle convergente*
  On dit qu'une suite réelle (u_n) **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N$:
  $$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
  On dit alors que (u_n) tend vers ℓ , et on le note :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
- *Suite complexe convergente*
  La définition précédente s'applique dans $\mathbb{C}$ en remplaçant la valeur absolue par le module.

On dit alors que u_n est convergente et converge (ou tend) vers l.

2.3.2 Exemples de suites réelles convergentes

- La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0 ; on note donc $u \to 0$..
- Si $|q| < 1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $|q| < 1$ alors la suite $\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (somme des termes de la suite géométrique de raison q) converge vers $\dfrac{1}{1-q}$.

On dit qu'une suite réelle **diverge** si elle ne converge pas. Une suite divergente peut soit avoir une limite infinie, soit n'avoir aucune limite. Examinons les deux possibilités.

2.4 Limite infinie de suite

2.4.1 Définition

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si pour tout réel A, $u_n > A$ à partir d'un certain rang. On note alors :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si pour tout réel A, $u_n < A$ à partir d'un certain rang. On note alors :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2.4.2 Exemple

La suite arithmétique de terme général $u_n = n$ a pour limite $+\infty$.

2.5 Limites de suites n'existant pas

Certaines suites réelles ne tendent ni vers un réel, ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$. C'est le cas, par exemple des suites géométriques de raison inférieure ou égale à −1, comme :

- la suite non bornée (1, −2, 4, −8, 16, −32, ...), géométrique de raison −2, ou même
- la suite bornée (1, −1, 1, −1, 1, −1, ...), géométrique de raison −1 ;

3 Séries numériques

3.1 Définition

Soit une suite numérique infinie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$. On appelle **série numérique** l'expression :

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

et on note :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Les nombres $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ sont les **termes** de la série. On peut appeler u_n le **terme général** de la série. La somme des n premiers termes de la série :

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_n$$

s'appelle la **somme partielle** d'ordre n et est notée S_n.

Exemples :

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

3.2 Convergence et divergence d'une série

Definition *(Convergence d'une série)* :
Si la suite des sommes partielles admet une limite finie, c'estàdire si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe et est finie, alors S s'appelle la **somme** de la série et on dit que la série **converge** vers S.

S'il n'existe pas de nombre S tel que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ on dit que la série **diverge**.

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, on dit que la série diverge vers $\pm\infty$ et on écrit $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \pm\infty$.

Exemples :

- $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge vers $+\infty$ de façon évidente.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ diverge car $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, etc. donc $\lim_{n\to\infty} S_n$ n'existe pas.
- Nous verrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge vers 2

3.3 Propriétés des séries

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Par conséquent,si une série converge, son terme général tend nécessairement vers zéro. Notons que la réciproque de cette propriété est fausse en général, c'est-à-dire que si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ peut ou non converger. Le fait que le terme général d'une série tende vers zéro est donc une condition nécessaire mais non suffisante de convergence. Par exemple, nous verrons que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ bien que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

- La multiplication de chaque terme d'une série par une constante non nulle n'affecte pas la convergence ou la divergence de la série.
- Enlever (ou rajouter) un nombre fini de termes à une série n'affecte pas la convergence ou la divergence de la série.

3.4 Séries particulières

3.4.1 Séries géométriques

Definition *(Séries géométriques)* :
Les séries :

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$$

avec a et r constantes convergent vers :

$$S = \frac{a}{1-r} \quad \text{si} \quad |r| < 1 \tag{1}$$

et divergent si $|r| \geqslant 1$.

En effet :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$

donc :

$$rS_n = ar + a^2r + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n$$

Soustrayons membre à membre :

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

donc :

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

- Si $|r| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$ (car $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ si $|x| < 1$) ; la série converge alors vers $\frac{a}{1-r}$.
- Si $|r| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$ si $|x| > 1$) ; la série diverge donc vers ∞.
- Si $r = 1$, la série devient $a + a + a + ...$; on a donc $S_n = na$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; la série diverge donc vers ∞.
- Si $r = -1$, la série devient $a - a + a - a + ...$ La $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ n'existe pas et la série diverge.

Exemples :

- La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ converge vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ comme annoncé.
- La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n$ diverge car $3 > 1$.

3.4.2 Les $p-$séries

Definition *($p-$séries)* :
On appelle $p-$**séries** les séries du type :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ...$$

où p est une constante.

Ces séries convergent pour $p > 1$ et divergent pour $p \leqslant 1$.

Nous prouverons ceci plus tard avec le test de l'intégrale.

Par exemple, la $p-$série correspondant à $p = 1$, appelée **série harmonique**, est divergente. Vérifions le directement en calculant et en majorant les sommes partielles d'ordre 2^k de cette série. On a :

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{4}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{3}{2} \\
S_{16} &= = S_8 + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{8}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

En continuant de la même manière, on montre que $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$ quand $k > 1$. Ceci implique que $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty$. Notons que pourtant, on a bien $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

3.5 Quelques propriétés utiles aux calculs de sommes de séries

- Si $c \neq 0$ la série $\sum cu_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. De plus, dans le cas de la convergence, on a :

  $$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

  Les constantes non nulles peuvent donc "sortir" du signe de sommation.

- Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge et on a :

  $$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

  La somme de la série dont le terme général est une somme de termes est égale à la somme des sommes de séries si ces séries convergent.

- Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(u_n - v_n)$ converge et on a :

  $$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

  La somme de la série dont le terme général est une différence de termes est égale à la différence des sommes de séries si ces séries convergent.

Par exemple, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

3.6 Séries à termes positifs, tests de convergence

Le plus souvent, la valeur exacte d'une série ne peut être obtenue. On se tourne alors vers la question de sa convergence ou de sa divergence. Les tests suivants aident à trancher cette question.

3.6.1 Le test de comparaison (pour les séries positives)

Théorème 3.1 *(Test de comparaison) :*

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries positives (c'est-à-dire telles que $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$) telles qu'à partir d'un certain entier positif m on ait $a_k \leqslant b_k$ $\forall k \geqslant m$, alors :

- *Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.*
- *Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.*

Remarque : on peut supposer $m = 1$ dans le théorème précédent, puisque la convergence n'est pas affectée par la suppression d'un nombre fini de termes.

Preuve
Supposons que $\sum b_n$ converge, soit $B_n = b_1 + \cdots + b_n$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle et $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la sére $\sum a_n$. Alors $A_n \leqslant B_n \quad \forall n$. Comme $\sum b_n$ est convergente, la suite de ses sommes partielles est bornée. Comme $A_n \leqslant B_n$, la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée. Par conséquent, cette suite converge et la série $\sum a_n$ converge également, ce ui termine la preuve.

Remarque :
Dans cette preuve, nous avons fait appel au résultat suivant :

Théorème 3.2
Une série à termes positifs $\sum s_n$ converge $\iff$ sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Preuve
$\Rightarrow$ Si $\sum s_n$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car toute suite convergente est bornée. En effet, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, posons $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$, prenons $\varepsilon = 1$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, on a $|S_n - L| < 1$. Donc, pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |S_n| & = & |(S_n - L) + L| \\ & \leqslant & |S_n - L| + |L| \\ & < & 1 + |L| \end{array}$$

Prenons M comme étant le maximum de $1 + |L|$ et $|S_1|, |S_2|, \cdots, |S_{n_0}|$, alors $|S_n| \leqslant M \quad \forall n$. Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
$\Leftarrow$ Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (car s_n est à termes positifs), elle converge, car toute suite monotone bornée est convergente. Ce dernier point résulte de la propriété de la borné supérieure que possède $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, posons $l = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{S_n\}$. :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } l - \varepsilon < S_{n_0} \leqslant l \text{ (par définition de la borne supérieure)}$$

donc :

$$\forall n \geqslant n_0, \text{ on a } l - \varepsilon < S_n \leqslant l$$

et la suite $(S_n)_{n\in Nn}$ est donc convergente vers l.

Exemples :

- Comme $\frac{1}{2^n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, alors $\sum \frac{1}{2^n+1}$ converge aussi.

- Comme $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge aussi.
- $\sum \frac{1}{n^2+5}$ converge car $\frac{1}{n^2+5} < \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (comme p-série avec $p = 2$).
- $\sum \frac{1}{3n+5}$ diverge car en posant $a_n = \frac{1}{4n}$ et $b_n = \frac{1}{3n+5}$ on a $a_n \leqslant b_n \forall n \geqslant 5$. En effet, $\frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{3n+5} \iff 3n+5 \leqslant 4n \iff n \geqslant 5$ et $\sum a_n$ diverge.
- $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n}$ converge car $\frac{1}{n^n} \geqslant \frac{1}{2^n} \forall n \geqslant 2$ et $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge puisque c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$.

3.6.2 Le test du quotient ou de comparaison à la limite (pour les séries positives)

Théorème 3.3 *(Test du quotient) :*

- *Si $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ et si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$ et $\neq$ de l'∞ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux (en d'autres mots, $\sum u_n$ converge $\iff$ $\sum v_n$ converge).*
- *Si $A = 0$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $A = \infty$ et si $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.*

Preuve
Supposons que $\sum v_n$ converge ; soit c un nombre positif tel que $A < c$. Alors $\exists m > 0$ entier tel que $\frac{u_n}{v_n} < c \quad \forall n \geqslant m$. Donc $u_n < cv_n \quad \forall n \geqslant m$. Mais comme $\sum v_n$ converge, $\sum cv_n$ converge aussi. Par le test de comparaison (3.1), $\sum u_n$ converge aussi.
Réciproquement, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge aussi (en fait, $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{A} > 0$ et on peut utiliser le même argument que précédemment.

Exemples :

- $\sum \frac{3n^2-5n+4}{7n^3+2}$ diverge car $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{3n^2-5n+4}{7n^3+2} . \frac{n}{1}\right] = \frac{3}{7}$ et que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- $\sum \frac{5n-2}{\sqrt{n^6-4n^2+7}}$ converge car $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{5n-2}{\sqrt{n^6-4n^2+7}} . \frac{n^2}{1}\right] = 5$ et que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

En utilisant ce test avec $v_n = \frac{1}{n^p}$ ($p-$série), on a le résultat suivant :

Corollaire 3.4
Si $\lim_{n\to\infty} u_n n^p = A$, $\sum u_n$ converge si $p > 1$ et A est fini et $\sum u_n$ diverge si $p \leqslant 1$ et $a \neq 0$ (A peut être égal à l'infini).

Exemples :

- $\sum \frac{n}{4n^3-2}$ converge car $\lim_{n\to\infty} n^2 . \frac{n}{4n^3-2} = \frac{1}{4}$
- $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ diverge car $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} . \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = \infty$.

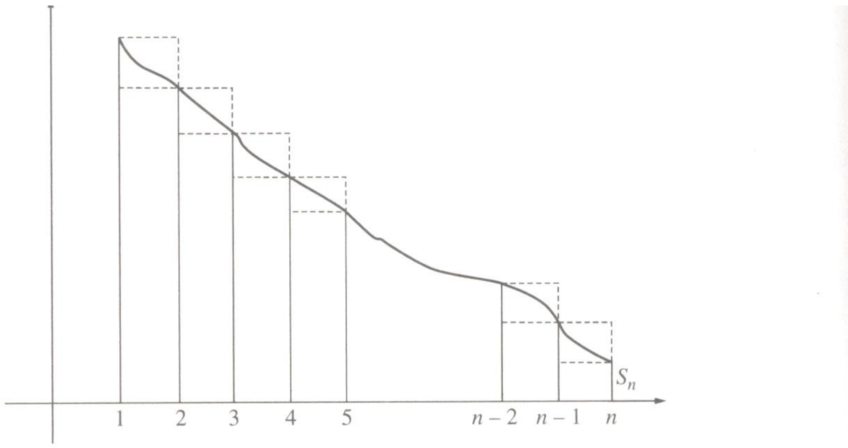
3.6.3 Le test de l'intégrale (pour les séries positives)

Théorème 3.5 *(Test de l'intégrale) :*

Si $\sum s_n$ *est une série positive et* $f(x)$ *une fonction continue, positive et décroissante sur* $[1, +\infty[$ *telle que* $f(n) = s_n \quad \forall n$ *alors :*

$$\sum s_n \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Preuve



Sur la figure ci-dessus, on voit que :

$$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x < s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_{n-1} = S_n$$

(*regarder les tirets supérieurs à* $f(x)$).
Si $\sum s_n$ converge, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est donc bornée. Donc $\int_1^u f(x)\mathrm{d}x$ est bornée $\forall u \geqslant 1$ et $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge.
Réciproquement, sur la figure, on a :

$$s_2 + s_3 + \cdots + s_n < \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

(*regarder les tirets inférieurs à* $f(x)$)
et donc :

$$S_n < \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + s_1$$

Si $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge, alors $S_n < \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x + s_1$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée ; comme c'est une suite positive et croissante, elle est donc convergente et $\sum s_n$ converge.

Exemples :

- $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge car en posant $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^u \\ &= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2}(\ln u)^2 = +\infty \end{aligned}$$

donc par le test de l'intégrale, $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car en posant $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^u \\ &= \lim_{u\to\infty} \left(-\frac{1}{u}+1\right) = +1 \end{aligned}$$

donc par le test de l'intégrale, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Application : convergence et divergence des $p-$séries.
On a vu que les séries $\sum \frac{1}{n^p}$ avec p constant sont appelées $p-$séries. Montrons que :

- Si $p > 1$ les $p-$séries convergent.
- Si $p \leqslant 1$ les $p-$séries divergent.

Supposons $p \neq 1$ (on sait déjà que la série harmonique diverge).
On peut aussi supposer $p > 0$, car si $p \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$ et la série diverge directement puisque son terme général ne tend pas vers zéro.
Appliquons le test de l'intégrale avec $f(x) = \frac{1}{x^p}$ (qui est bien une fonction positive et décroissante sur $[1, +\infty[$).
Comme on a :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x &= \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^u \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] \end{aligned}$$

- Si $p > 1$ alors $p-1 > 0$ et $\lim\limits_{u\to\infty} u^{1-p} = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{1}{u^{p-1}} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}$ et $\sum \frac{1}{n^p}$ converge.
- Si $p < 1$ alors $p-1 < 0$ et $\lim\limits_{u\to\infty} u^{1-p} = +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = +\infty$ et $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge.

Remarque :
On peut traiter le cas de la série harmonique avec ce critère puisque si $p = 1$, $\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to\infty} [\ln x]_1^u = +\infty$ et la série harmonique diverge donc bien.

3.7 Séries alternées

Une **série alternée** est une série dont les termes sont tour à tour positifs et négatifs, c'est-à-dire une série de la forme :

$$\sum (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

où les a_n sont tous positifs.

Théorème 3.6 *(Théorème des séries alternées) :*
Soit $\sum (-1)^{n+1} a_n$ *une série alternée. Si la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *alors :*

- $\sum (-1)^{n+1} a_n$ *converge vers une somme* A*.*
- *Si* A_n *est la* $n^{i\grave{e}me}$ *somme partielle de cette série et si* $R_n = A - A_n$ *est l'erreur correspondante, alors* $|R_n| < a_{n+1}$ *(c'est-à-dire que l'erreur est plus petite en valeur absolue que le premier terme omis).*

Preuve

- Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $a_{2n+1} > a_{2n+2}$ et donc $a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$.
  Par conséquent :

$$\begin{aligned} A_{2n+2} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \\ &= A_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > A_{2n} > 0 \end{aligned}$$

  Donc la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  D'autre part :

$$A_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

  donc $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
  La suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers une limite L.
  Maintenant $A_{2n+1} = A_{2n} + a_{2n+1}$ donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} A_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \\ &= L + 0 = L \end{aligned}$$

  donc $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = L$ et $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge.

- On a pour le reste d'indice pair $2n$:

$$\begin{aligned} R_{2n} &= (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \cdots > 0 \\ \text{et } R_{2n} &= a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) < a_{2n+1} - \cdots \end{aligned}$$

  donc $|R_{2n}| < a_{2n+1}$.
  Pour les restes d'indices impairs $2n+1$, on a :

$$\begin{aligned} R_{2n+1} &= -(a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) - \cdots < 0 \\ \text{et } R_{2n+1} &= -a_{2n+2} + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + (a_{2n+5} - a_{2n+6}) + \cdots > -a_{2n+2} \end{aligned}$$

  donc $R_{2n+1} > a_{2n+2}$.
  On a donc $\forall k$ (pair ou impair) :

$$|R_k| < a_{k+1}$$

Remarque :
La somme d'une série alternée est donc positive et comprise entre $a_1 - a_2$ et a_1.
En effet, $R_1 = A - A_1 = A - a_1 < 0$ et $|R_1| < a_2 \rightarrow |A - a_1| = -A + a_1 < a_2$ donc $A > a_1 - a_2$.

Exemple :
La **série harmonique alternée** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ est convergente et sa somme A est comprise entre $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et 1. Nous verrons plus loin que $A = \ln 2 \approx 0,693...$.

3.8 Convergence absolue et convergence conditionnelle d'une série

Definition *(Convergence absolue et convergence conditionnelle) :*

Considérons une série $\sum s_n$.

- $\sum s_n$ est dite absolument convergente $\iff$ $\sum |s_n|$ converge.
- $\sum s_n$ est dite conditionnellement convergente $\iff$ la série converge sans converger absolument.

Exemple : la série $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ est conditionnellement convergente.

Nous admettrons sans preuve le théorème suivant :

Théorème 3.7 *(Théorème de réarrangement des termes) :*

- *Si $\sum s_n$ est absolument convergente, alors tout réarrangement de $\sum s_n$ (c'est-à-dire un changement de l'ordre dans lequel les termes arrivent) est convergent et a la même somme que la série $\sum s_n$.*
- *Si $\sum s_n$ est conditionnellement convergente, $\forall c \in \mathbb{R}$ fini ou infini, il y a un réarrangement des termes de $\sum s_n$ de somme c (la série peut donc converger vers n'importe quelle somme).*

Par exemple, illustrons le fait qu'une série conditionnellement convergente peut converger vers différentes sommes selon les réarrangements des termes.
La série :

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

converge en fait vers $\ln 2$ comme nous le verrons.
Appelons S la somme de cette série ; en prenant la moitié de chaque terme, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Ajoutons terme par terme cette série à la série précédente, dont la somme est S, c'est-à-dire :

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

On obtient :

$$\tfrac{3}{2}S = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} \cdots$$

c'est-à-dire une autre somme, alors qu'on a procédé à un simple réarrangement des termes.

Théorème 3.8 *(La convergence absolue implique la convergence simple) :*

Si une série converge absolument, elle converge simplement.

Preuve
On a :

$$0 \leqslant s_n + |s_n| \leqslant 2|s_n|$$

Comme $\sum |s_n|$ converge, $\sum 2|s_n|$ converge aussi. Par le test de comparaison (3.1), $\sum (s_n + |s_n|)$ converge. Donc :

$$\sum s_n = \sum ((s_n + |s_n|) - |s_n|)$$

converge également puisque la série d'une différence de séries convergentes converge vers la somme qui est la différence des sommes des séries.

Les critères suivants permettent d'étudier la convergence absolue de séries :

Théorème 3.9 *(Test du rapport ou critère de d'Alembert) :*

Soit $\sum s_n$ *une série,*

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r < 1$, *la série* $\sum s_n$ *converge absolument.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r > 1$ *(ou* $r = +\infty$*) la série* $\sum s_n$ *diverge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r = 1$, *on ne peut tirer aucune conclusion.*

Preuve

- Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r < 1$. Choisissons t tel que $r < t < 1$.
  Alors $\exists$ un entier positif m tel que si $n \geqslant m$, $\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| \leqslant t$.
  Donc :
  $$|s_{m+1}| \leqslant t|s_m| \quad , \quad |s_{m+2}| \leqslant t|s_{m+1}| \leqslant t^2|s_m| \quad \cdots \quad |s_{m+k}| \leqslant t^k|s_m|$$
  Mais $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t^k|s_m|$ est une série géométrique convergente de raison $t < 1$. Donc, par le test de comparaison (3.1), $\sum |s_n|$ converge (puisqu'à partir de m, on a $|s_{m+k}| \leqslant t^k|s_m|$). Donc la série $\sum s_n$ est absolument convergente.
- Supposons $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r$ et $r > 1$ (ou $r = +\infty$). Choisissons t tel que $1 < t < r$. Alors $\exists$ un entier positif m tel que si $n \geqslant m$ $\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| \geqslant t$.
  Donc :
  $$|s_{m+1}| \geqslant t|s_m| \quad , \quad |s_{m+2}| \geqslant t|s_{m+1}| \geqslant t^2|s_m| \quad \cdots \quad |s_{m+k}| \geqslant t^k|s_m|$$
  Mais $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t^k|s_m|$ est une série géométrique de raison $t > 1$ et donc divergente vers $+\infty$. Donc, par le test de comparaison (3.1), $\sum |s_n|$ diverge et comme le terme général $s_n \to \infty$, $\sum s_n$ diverge.
- Pour la série $\sum \frac{1}{n}$ par exemple, on a :
  $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to_infty} \frac{n}{n+1} = 1$$
  et cette série diverge.
  Par contre, pour la série $\sum \frac{1}{n^2}$, on a :
  $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$
  et cette série converge. On ne peut donc rien conclure quand $r = 1$.

Théorème 3.10 *(Test de la racine ou critère de Cauchy) :*

Soit $\sum s_n$ *une série,*

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r < 1$, *la série* $\sum s_n$ *converge absolument.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r > 1$, *(ou* $r = +\infty$*) la série* $\sum s_n$ *diverge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r = 1$, *on ne peut tirer aucune conclusion.*

Preuve

- Supposons $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r < 1$. Choisissons t tel que $r < t < 1$, alors $\exists$ un entier positif m tel que :

$$\sqrt[n]{|s_n|} \leqslant t \quad \forall n \geqslant m$$

Donc :

$$|s_n| \leqslant t^n \quad \forall n \geqslant m$$

Donc $\sum |s_n|$ converge par comparaison avec une série géométrique convergente et $\sum s_n$ est absolument convergente.

- Supposons $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r > 1$ (ou $r = +\infty$). Choisissons t tel que $1 < t < r$, alors $\exists$ un entier positif m tel que :

$$\sqrt[n]{|s_n|} \geqslant t \quad \forall n \geqslant m$$

Donc :

$$|s_n| \geqslant t^n \quad \forall n \geqslant m$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} t^n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ et la série $\sum s_n$ diverge comme son terme général ne tend pas vers zéro.

- Considérons de nouveau les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$. Dans les deux cas, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = 1$$

et l'une diverge alors que l'autre converge.
Remarque :
On a :

$$\lim_{n\to\infty} n^{-n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$$

3.9 Exercices sur les séries numériques

Exercice 1
Utiliser le test du rapport pour étudier la convergence des séries suivantes :

- $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots$ *Rép. :* **converge**
- $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \ldots$ *Rép. :* **diverge**
- $1 + \frac{1.2}{1.3} + \frac{1.2.3}{1.3.5} + \frac{1.2.3.4}{1.3.5.7} + \ldots$ *Rép. :* **converge**
- $2 + \frac{3}{2}.\frac{1}{4} + \frac{4}{3}.\frac{1}{4^2} + \frac{5}{4}.\frac{1}{4^3} + \ldots$ *Rép. :* **converge**
- $\sum \frac{n3^n}{(n+1)!}$ *Rép. :* **converge**
- $\sum \frac{n^n}{n!}$ *Rép. :* **diverge**

Exercice 2
Etudier la convergence de la série suivante par le critère de d'Alembert et par le critère de comparaison.

$$1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \ldots$$

Rép. : **pas de conclusion par d'Alembert mais une comparaison avec** $\sum \frac{1}{n}$ **montre qu'elle diverge**

Exercice 3
Déterminer si les séries alternées suivantes sont absolument convergentes, conditionnellement convergentes ou divergentes.

1. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$
2. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$
3. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$
4. $\sum(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{3n+1}$
5. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$
6. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$
7. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$
8. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
9. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}$
10. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+2}$
11. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(n!)^2}$
12. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$
13. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^4+2}$
14. $\sum(-1)^{n+1}n\left(\frac{3}{4}\right)^4$
15. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^2-3}{n^2+n+2}$
16. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^n}$
17. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^{n+2}}$
18. $\sum(-1)^{n+1}\frac{\cos \pi n}{n^2}$

1. *Rép. :* **abs. cgte**
2. *Rép. :* **cond. cgte**
3. *Rép. :* **dgte**
4. *Rép. :* **cond. cgte**
5. *Rép. :* **cond. cgte**
6. *Rép. :* **dgte**
7. *Rép. :* **abs. cgte**
8. *Rép. :* **cond. cgte**
9. *Rép. :* **abs. cgte**
10. *Rép. :* **abs.cgte**
11. *Rép. :* **abs. cgte**
12. *Rép. :* **cond. cgte**
13. *Rép. :* **abs. cgte**
14. *Rép. :* **abs. cgte**
15. *Rép. :* **dgte**
16. *Rép. :* **abs. cgte**
17. *Rép. :* **abs. cgte**
18. *Rép. :* **abs. cgte**

Exercice 4

- Combien de termes de $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ suffisent pour obtenir une approximation à $0,0005$ de la somme ? Trouver cette approximation.

  Rép. : $n = 6$; $\frac{91}{144} \approx 0,632$
- Idem pour $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$ à $0,001$.

  Rép. : $n = 3$; $0,842$
- Idem pour $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ à $0,001$.

  Rép. : $n = 1000$; $0,693$

Exercice 5
Déterminer la convergence éventuelle des séries :

- $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- $\sum \frac{(2sn)!}{n^4}$
- $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$
- $\sum \frac{3^n}{n!}$
- $\sum \frac{4^n}{(n+2)^n}$
- $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

- *Rép. :* **cgte**
- *Rép. :* **dgte**
- *Rép. :* **dgte**
- *Rép. :* **cgte**
- *Rép. :* **cgte**
- *Rép. :* **dgte**

3.10 Autres tests de convergence

Théorème 3.11 *(Test de Raabe) :*

Posons $L = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ *alors la série* $\sum u_n$ *:*

- *converge absolument si* $L > 1$
- *diverge ou converge conditionnellement si* $L < 1$

Si $L = 1$*, le test ne permet pas de conclure*

Théorème 3.12 *(Test de Gauss) :*

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^q}$ *où* $|c_n| < P \quad \forall n > \mathbb{N}$ *(c'est-à-dire si la suite* c_n *est bornée) alors la série* $\sum u_n$

- *converge absolument si* $L > 1$
- *diverge ou converge conditionnellement si* $L \leqslant 1$

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Définitions et convergence

4.1.1 Suite de fonctions, définition

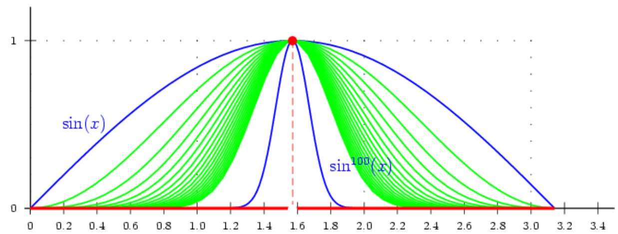
Une **suite de fonctions** est une suite (f_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (qui désigne l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle), c'est-à-dire qu'elle associe à chaque entier naturel n la fonction f_n :

$$(f_n) : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ n & \mapsto & f_n \end{array}$$

Exemple :
Voici la représentation graphique pour quelques valeurs de n de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n(x) = \sin^n x \; \forall n \in \mathbb{N}$$

sur l'intervalle $[0; \pi]$.



4.1.2 Convergence simple et convergence uniforme des suites de fonctions

Soit $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$. La suite est dite **convergente** vers $F(x)$ ou est dite avoir pour limite $F(x)$ sur $[a, b]$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall x \in [a, b] \text{ on peut trouver } N > 0 \text{ tel que } \forall n > N, \qquad |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

Le nombre N peut dépendre à la fois de x et de ε. S'il dépend uniquement de ε (et pas de x), la suite est dite **uniformément convergente** vers $F(x)$ sur $[a, b]$.

On a le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.1 *(Convergence uniforme et continuité) :*

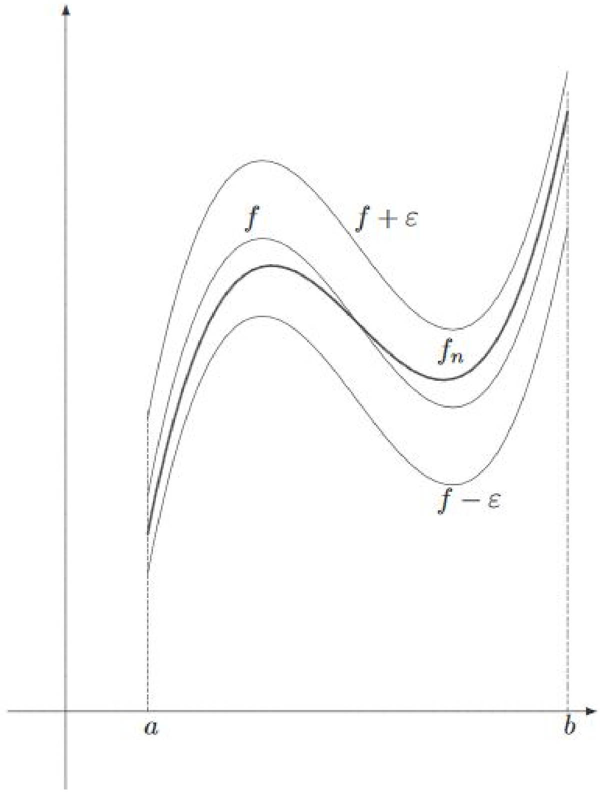
Si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur X vers une fonction f alors f est continue sur$X$.

Ou encore (par contraposition) :

Une fonction discontinue ne peut pas être limite uniforme de fonctions continues.

Sur la figure précédente, la limite simple (en rouge) des fonctions continues (en vert) $f_n(x) = \sin n(x)$ est discontinue donc la convergence n'est pas uniforme.

La convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une forme de convergence plus exigente que la convergence simple. La convergence devient uniforme quand toutes les suites $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ avancent vers leur limite respective avec une sorte de « mouvement d'ensemble ».
Dans le cas de fonctions numériques d'une variable, la notion prend une forme d'« évidence » géométrique : le graphe de la fonction f_n se « rapproche » de celui de la limite.
Si l'on trace les courbes représentatives des fonctions $f+\varepsilon$ et $f-\varepsilon$, dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f revient à dire qu'à partir d'un certain rang la courbe de f_n est comprise entre les deux autres.



4.1.3 Séries de fonctions, définition

Une série de fonctions est une série dont les termes sont des fonctions toutes définies sur un ensemble X, et à valeurs réelles ou complexes, ou plus généralement vectorielles.
Plus particulièrement, une **série de fonctions** est une série $\sum f_n(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des fonctions d'une variable réelle), c'est-à-dire qu'elle associe à chaque entier naturel n la fonction $S_n(x)$:

$$(S_n) : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ n & \mapsto & S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{array}$$

4.1.4 Convergence simple et convergence uniforme des séries de fonctions

La série de fonctions :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

est dite **convergente** sur $[a, b]$ si la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$ est convergente sur $[a, b]$. Dans ce cas on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ et on appelle $S(x)$ la **fonction somme** de la série.
Il en résulte que :

$$\begin{array}{c} \sum u_n(x) \text{ converge vers } S(x) \text{ sur } [a, b] \text{ ssi } \forall\varepsilon > 0 \text{ et } \forall x \in [a, b] \text{ on peut trouver } N > 0 \text{ tel que} \\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N. \end{array}$$

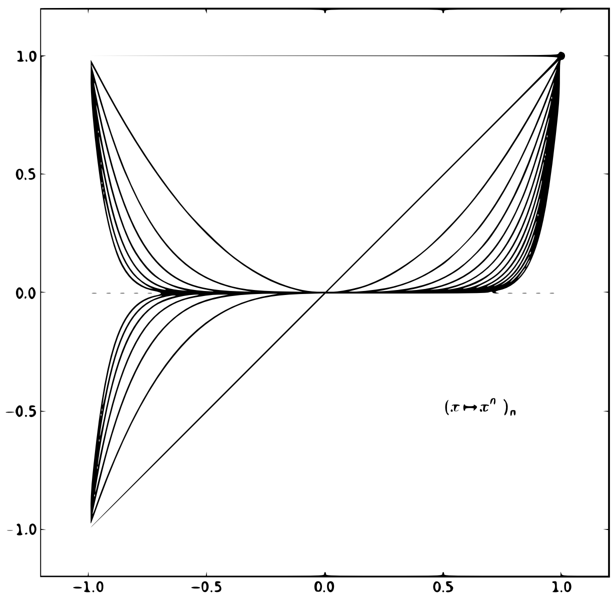
Si N dépend seulement de ε (et pas de x) la série est appelée **uniformément convergente** sur $[a, b]$. De façon équivalente, si on pose $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$, la série $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur $[a, b]$ si $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N$ dépendant de ε (mais pas de x) tel que $|R_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N$ et $\forall x \in [a, b]$

Exemples :

On considère la suite de fonctions puissances $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite de fonctions converge simplement sur $]1, 1]$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

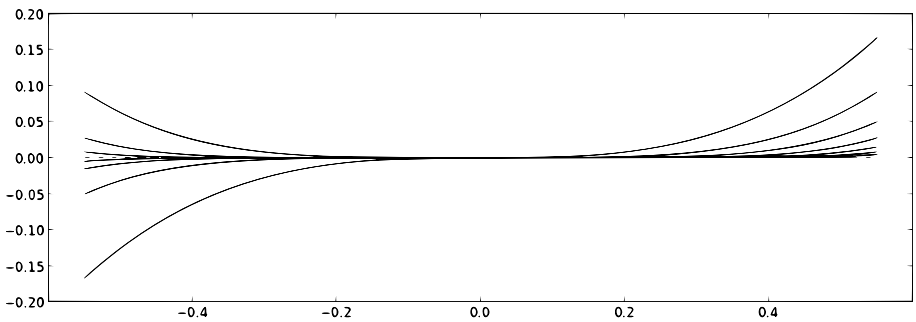
Puisque les fonctions de la suite sont continues et que la limite simple f n'est pas continue (en 1), la convergence n'est pas uniforme sur $]1, 1]$. Par densité, elle ne l'est donc pas non plus sur $]1, 1[$.



Par contre, la convergence est uniforme sur tout segment $[a, a]$ avec $0 \leqslant a < 1$ puisque :

$$\|x \mapsto x^n\|_{\infty,[-a,a]} = a^n$$

qui converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La figure ci-dessous montre que la convergence sur $[1/2, 1/2]$ de la suite des fonctions puissances est uniforme.



4.1.5 Convergence normale d'une série de fonctions

La **convergence normale** est l'un des modes de convergence d'une série de fonctions. Si (f_n) est une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un même ensemble X, la série de terme général f_n converge normalement sur X s'il existe une suite de réels u_n tels que :

- pour tout n, $|f_n|$ est majorée par u_n sur X ;
- la série de terme général u_n converge.

Exemple :
La série $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ est normalement convergente. En effet, $\frac{|sin(nx)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

'Remarque :
Si la série (f_n) converge normalement, elle converge en particulier absolument pour tout x de I
.

Théorème 4.2 *(Lien entre convergence normale et convergence uniforme)*
Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$. Si (f_n) est normalement convergente sur I, alors (f_n) est uniformément convergente sur I .

Preuve
Soit (f_n) une série de fonctions normalement convergente : il existe donc une série numérique à termes positifs $(\sum a_n)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leqslant a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.
Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $(\sum a_n)$ est convergente, elle satisfait le critère de Cauchy.
Donc $\exists N \in \mathbb{N} | N \leqslant n < p \Rightarrow a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p < \varepsilon$.
Soient alors $n, p \in \mathbb{N}$ vérifiant $N \leqslant n < p$ et soit $x \in I$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |f_{n+1}(x) + \cdots + f_p(x) & \leqslant & |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_p(x)| \\ & \leqslant & a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_p \\ & < & \varepsilon \end{array}$$

Donc la série $(\sum f_n)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, et elle converge uniformément sur I .

La convergence normale d'une telle série implique donc sa convergence uniforme. Par conséquent, tous les résultats qui concernent la convergence uniforme sont aussi valables pour la convergence normale. En particulier, si l'ensemble X est muni d'une topologie :

Théorème 4.3 *La somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement est une fonction continue.*

La convergence normale d'une série impliquant également sa convergence absolue en tout point, a fortiori, la convergence normale d'une série implique sa convergence simple, autrement dit la convergence de la série en tout point.
Les implications réciproques sont fausses.

4.2 Séries entières ou séries de puissances entières

4.2.1 Définition

Une **série entière** est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

où les coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une suite réelle ou complexe. La série est dite **entière** du fait qu'elle fait intervenir des puissances entières.

4.2.2 Rayon de convergence

Les séries entières possèdent des propriétés de convergence remarquables, qui s'expriment pour la plupart à l'aide d'une grandeur associée à la série, son **rayon de convergence** R. Par exemple, sur le disque de convergence (disque ouvert de centre 0 et de rayon R), la fonction somme de la série peut être dérivée indéfiniment terme à terme.
Cette quantité est définie comme suit :

$$R = \sup \{|z|, z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge } \} \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$$

L'existence de cette grandeur repose sur le lemme suivant, dû à Abel, mais qu'il ne faut pas confondre avec le théorème d'Abel, lequel est utilisé pour démontrer la continuité de la somme de la série à la frontière du disque de convergence.

Lemme 4.4 *(Lemme d'Abel) :*
Supposons qu'il existe un réel r_0 tel que la suite de terme général $(a_n r_0^n)$ soit bornée, alors :

- *la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge absolument pour $|z| < |r_0|$.*
- *la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge normalement pour $|z| < r$ pour tout $0 < r < |r_0|$.*

Preuve
La suite $(a_n r_0^n)$ étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n r_0^n| \leqslant M$.

- Pour $|z| < |r_0$:

$$|a_n z^n| = \left|\frac{a_n r_0^n z^n}{r_0^n}\right| = |a_n r_0^n| \left|\frac{z}{r_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{r_0}\right|^n.$$

  La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{r_0}\right|^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{z}{r_0}\right| < 1$ donc convergente. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ est convergente et par conséquent, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < |r_0|$.

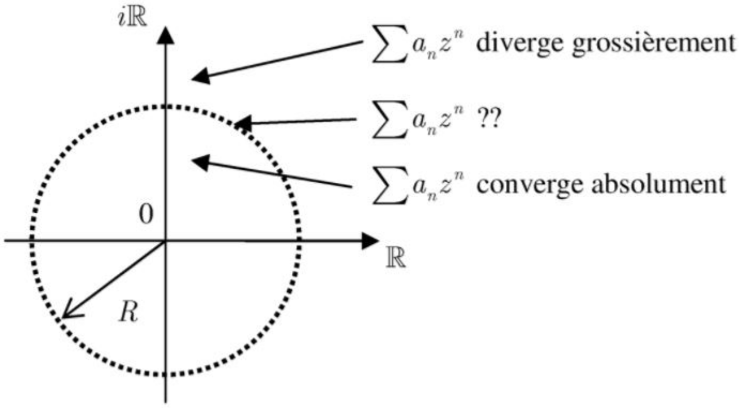
- Soit $0 < r < |r_0|$ et soit $|z| \leqslant r$.

$$|a_n z^n| = \left|\frac{a_n r_0^n z^n}{r_0^n}\right| = |a_n r_0^n| \left|\frac{z}{r_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{r}{r_0}\right|^n.$$

  Comme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ est une série numérique convergente, la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est normalement convergente pour tout z tel que $|z| < r$ et tout r tel que $0 < r < |r_0|$.

Théorème 4.5 *(Convergence simple des séries entières) :*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

- *Si $|z| < R|$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*
- *Si $|z| > R|$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement (plus précisément la suite $(a_n z^n)$ n'est même pas bornée).*



Preuve
Notons $A = \{r \geqslant 0 | (a_n r^n) \text{est bornée}\}$ et $R = \sup A$.

- Si $|z| < R$ alors $|z|$ ne majore pas A et donc il existe $r > 0$ tel que $|z| < r$ et tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. En vertu du lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > R$ alors $|z| \notin A$ et donc $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

Le disque :

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} | |z| < R\}$$

est appelé **disque ouvert de convergence** de la série entière.
Remarque :
Sur ce disque, la série entière converge assurément. Elle peut aussi converger en certains points du cercle limite.

4.2.3 Séries entières réelles

Dans l'ensemble des nombres réels, la série de puissances $\sum a_n x^n$ converge pour $|x| < R$, c'est-à-dire dans un **intervalle de convergence** $-R < x < R$, et diverge pour $|x| > R$. Pour $|x| = R$, la série peut converger ou non.
Les cas particuliers $R = 0$ et $R = \infty$ peuvent arriver. Dans le premier cas, la série converge seulement pour $x = 0$, dans le second cas, elle converge $\forall x$.

Théorème 4.6 *(Convergence uniforme des séries enières) :*
Une série de puissances converge uniformément et absolument sur tout intervalle qui se trouve entièrement dans son intervalle de convergence (c'est-à-dire $\forall x$ tel que $-R < x < R$).

Théorème 4.7 *(Intégration des séries entières) :*
Soit $f(x)$ la fonction définie par la série de puissances $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur son intervalle de convergence (c'est-à-dire $\forall x$ tel que $-R < x < R$, alors :

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \text{ pour } |x| < R \tag{2}$$

où l'intervalle de convergence de la série de puissances de droite est le même que celui de la série originale.

En d'autres mots, la primitive de $f(x)$ s'obtient par une intégration terme à terme de la série de puissances associée à la fonction $f(x)$.
De la même manière, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \tag{3}$$

Théorème 4.8 *(Dérivation des séries entières) :*
Soit $f(x)$ la fonction définie par la série de puissances $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur son intervalle de convergence (c'est-à-dire $\forall x$ tel que $-R < x < R$, alors :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n x^{n-1} \text{ pour } |x| < R \tag{4}$$

où l'intervalle de convergence de la série de puissances de droite est le même que celui de la série originale.

En d'autres mots, la dérivée de $f(x)$ s'obtient par une dérivée terme à terme de la série de puissances associée à la fonction $f(x)$.

Exemples :

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...$ est une série géométrique de raison x. Elle converge donc pour $|x| < 1$ et sa somme est $\frac{1}{1-x}$.
  Comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ... \qquad \forall |x| < 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\end{aligned}$$

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$ est une série géométrique de raison $-x$. Elle converge donc pour $|x| < 1$ et sa somme est $\frac{1}{1+x}$.
  On a en intégrant :

$$\int \tfrac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + K = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{x^n}{n} + K$$

  et donc :

$$\ln|1+x| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{x^n}{n} + K \qquad \forall |x| < 1$$

  En calculant les deux membres en $x = 0$, on obtient $K = 0$ et donc finalement, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... \qquad \forall |x| < 1 \tag{5}$$

  Remarque : comme $|x| < 1, -1 < x < 1$ et $0 < 1 + x < 2$ donc $|1 + x| = 1 + x$.

  En remplaçant x par $x - 1$, on a aussi :

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{(x-1)^n}{n} = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + ... \qquad \forall |x-1| < 1 \text{ c'est-à-dire pour } 0 < x < 2$$

  donc la fonction $\ln x$ est définie par une série entière sur $]0, 2[$.

4.2.4 Intervalle de convergence d'une série entière

Soit la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Considérons la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. C'est une série positive $\forall x$. Par le test de d'Alembert, la série $\sum a_n x^n$ converge si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = L|x| < 1$, donc si $|x| < \frac{1}{L}$ avec $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Donc, le rayon de convergence d'une série entière vaut :

$$R = \tfrac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left|\tfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

On a donc :

Théorème 4.9 *(Intervalle de convergence des séries entières) :*
Une série entière réelle converge donc sur un intervalle $-R < x < R$ avec :

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{6}$$

Exemples :

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ converge absolument (et donc converge) $\forall x \in \mathbb{R}$ car :

  $$R = \lim_{n\to\infty} \left| \tfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \tfrac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n+1}{1} = \infty.$$

  L'intervalle de convergence de cette série est donc $-\infty < x < \infty$. Nous verrons plus loin que la somme de cette série correspond à la fonction exponentielle naturelle e^x.

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + ...$ ne converge qu'en $x = 0$ car :

  $$L = \tfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \tfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \tfrac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n+1}{1} = \infty.$$

  donc $R = 0$, le rayon de convergence est nul.

4.2.5 Séries de puissances entières de $(x - a)$ $\quad ,\forall a \in \mathbb{R}$

Par un simple changement de variable $x \to (x - a)$, on peut appliquer tous les résultats précédents aux séries entières du type :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

En particulier, ces séries convergent pour x appartenant à un intervalle centré sur a et de rayon R, c'est-à-dire $\forall x$ tel que $|x - a| < R$ ou encore $-R + a < x < R + a$.

Exemple :
La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à :

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \tfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n+1}{n} = 1$$

et converge donc si $|x - 2| < 1$, c'est-à-dire entre $1 < x < 3$.
Au point $x = 1$, la série devient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge (c'est la série harmonique alternéee).
Au point $x = 3$, la série devient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge (c'est la série harmonique).
Cette série converge donc sur l'intervalle $[1, 3[$.

4.2.6 Exercices sur les séries entières

Exercice 6
Trouver les intervalles de convergence des séries de puissances suivantes :

- $\sum nx^n$
- $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$
- $\sum \frac{x^n}{n5^n}$
- $\sum \frac{x^{2n}}{n(n+1)(n+2)}$
- $\sum \frac{x^{n+1}}{(\ln(n+1))^2}$
- $\sum \frac{x^n}{1+n^3}$
- $\sum \frac{(x-4)^n}{n^2}$
- $\sum \frac{(3x-2)^n}{5^n}$
- $\sum \frac{x^n}{n^2}$
- $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + ...$
- $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + ...$
- $1 + \frac{100x}{1.3} + \frac{10000x^2}{1.3.5} + \frac{1000000x^3}{1.3.5.7} + ...$
- $\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - ...$
- $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
- $1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + ...$
- $(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + ...$
- $x + \frac{2^k}{2!}x^2 + \frac{3^k}{3!}x^3 + ...$
- $x + \frac{2!}{2^2}x^2 + \frac{3!}{3^2}x^3 + ...$
- $\sum \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

4.2.7 Convergence au bord du domaine

Le théorème suivant permet d'étendre la formule de la somme d'une série de puissances jusqu'au bord du domaine de convergence.

Théorème 4.10 *(Théorème d'Abel) :*
Si une série de puissances $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *a un intervalle de convergence fini* $|x-c| < R$*, et si* $f(x)$ *est la fonction dont les valeurs sur cet intervalle sont données par la série de puissances, si la série de puissances converge aussi au point extrême à droite (resp. à gauche)* $b = c + R$ *(resp.* $a = c - R$*, alors* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ *(resp.* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$*) existe et est égale à la somme de la série en* b *(resp. en* a*).*

Exemples :

- On a $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^(n-1)\frac{x^n}{n} \quad \forall |x| < 1$. Au point extrême à droite, $x = 1$, la série devient la série harmonique alternée qui converge. Par Abel, cette série est égale à $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$, donc $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}....$

- Repartons de $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...$ pour $|x| < 1$.
  Remplaçons x par $-x^2$ pour obtenir :

  $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - ... \text{ pour } |x| < 1car| - x^2| < 1 \iff |x| < 1$$

  En intégrant les deux membres, on a :

  $$\begin{aligned} \text{Arctan}\, x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + K \text{ pour } |x| < 1 \\ &= K + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + ... \end{aligned}$$

  où K est une constante d'intégration.

  En $x = 0$, on a : $0 = K + 0 + ...$ donc $K = 0$. Il s'ensuit que :

  $$\text{Arctan}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \tag{7}$$

  Au point extrême $x = -1$, la série devient :

  $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

qui converge par le théorème des séries alternées. Donc par le théorème d'Abel, on a :

$$\lim_{x \to 1^-} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{8}$$

4.2.8 Opérations avec les séries entières

Nous supposons dans les théorèmes suivants que les séries de puissances convergent dans un certain intervalle.

Théorème 4.11 *(Somme et différence de deux séries entières) :*
Deux séries de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ *peuvent être ajoutées ou soustraites terme par terme* $\forall x$ *appartenant aux deux intervalles de convergence*

Théorème 4.12 *(Multiplication de deux séries entières) :*
Deux séries de puissances , par exemple $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ *peuvent être multipliées pour obtenir une série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ $\forall x$ *appartenant aux deux intervalles de convergence, avec :*

$$c_n = a_0.b_n + a_1.b_{n-1} + a_2.b_{n-2} + ... + a_{n-1}.b_1 + a_n.b_0 \tag{9}$$

5 Développements de fonctions en séries entières : séries de Taylor et de Mac Laurin

5.1 Introduction

Un moyen simple pour explorer es représentations en série de fonctions est de supposer qu'une telle représentation existe et de découvrir les détails. Bien sûr, tout ce qui est trouvé doit être confirmé de manière rigoureuse. Supposons qu'une fonction $f(x)$ puisse être représentée par :

$$f(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \cdots + A_n(x-c)^n + \cdots$$

au voisinage de c.

Notons que les coefficients A_n peuvent être reliés aux dérivées successives de f. En particulier, on a :

$$A_0 = f(c), \qquad A_1 = f'(c) \qquad A_2 = \tfrac{f''(c)}{2!} \qquad , \cdots , \qquad A_n = \tfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Ceci suggère qu'une représentation en série de $f(x)$ est :

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \tfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

Un premier pas pour formaliser la représentation en série d'une fonction f pour laquelle les dérivées existent jusqu'à l'ordre n est réalisé en introduisant les polynômes de Taylor de la fonction :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0(x) &= f(c) \\
\mathcal{P}_1(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) \\
\mathcal{P}_2(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 \\
&\cdots \\
\mathcal{P}_n(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x-c)^i
\end{aligned}$$

où $f^{(i)}$ désigne la dérivée $i^{\text{ème}}$ de la fonction f.

5.2 Théorème de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor (1685-1731), qui l'établit en 1712, donne une **approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un poin**t par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Théorème 5.1 *(Formule de Taylor) :*
Supposons que $f(x)$ et ses dérivées $f', f'', ..., f^{(n)}$ existent et soient continues dans un intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$ et supposons que $f^{(n+1)}$ existe dans un intervalle ouvert $a < x < b$. Alors, $\forall c \in [a,b]$, on peut écrire :

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + R_n(x)$$

où :

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \tag{10}$$

désigne le reste sous forme intégrale.

Preuve
On raisonne par récurrence sur n.
Le théorème est vrai pour $n = 0$ car on a bien :

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\mathrm{d}t = f(c) + [f(t)]_c^x = f(c) + f(x) - f(c)$$

Supposons (hypothèse de récurrence) le théorème vrai pour $n = k$ et montrons qu'il est alors vrai pour $n = k+1$.
On a donc :

$$f(x) = \mathcal{P}_k(x) + R_k(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \tfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \tfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \tfrac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

On utilise l'intégration par parties pour calculer :

$$\tfrac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Posons :

$$\left\{\begin{array}{c} u'(t) = (x-t)^k \\ v(t) = f^{(k+1)}(t) \end{array}\right|$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{c} u(t) = \tfrac{1}{k+1}(x-t)^{k+1}.(-1) \\ v'(t) = f^{(k+2)}(t) \end{array}\right|$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}(x-t)^{k+1}.f^{(k+1)}(t)\right]_c^x + \frac{1}{k!}\frac{1}{k+1}\int_c^x \mathrm{d}t(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t) \\
&= \frac{1}{(k+1)!}(x-c)^{k+1}.f^{(k+1)}(c) + \frac{1}{(k+1)!}\int_c^x \mathrm{d}t(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t)
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{1}{(k+1)!}(x-c)^{k+1}.f^{(k+1)}(c) \\
&\quad + \frac{1}{(k+1)!}\int_c^x \mathrm{d}t(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t) \\
&= \mathcal{P}_{k+1}(x) + R_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

La formule est donc vraie à l'ordre $k+1$ ce qui termine la preuve.

5.3 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 5.2 *(Formule de Taylor-Lagrange)*

Soient I un intervalle ouvert, f une fonction n fois dérivable dans I, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{(n)!}h^n \tag{11}$$

Preuve
Posons $x_0 + h = x$, et considérons la fonction F définie dans I par :

$$F(t) = f(x) - f(t) - \tfrac{f^{(1)}(t)}{1!}.(x-t) - \cdots - \tfrac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}.(x-t)^{n-1}$$

Par un calcul facile nous obtenons :

$$F'(t) = -f^{(1)}(t) + \tfrac{f^{(1)}(t)}{1!} - \tfrac{f^{(2)}(t)}{1!}.(x-t) + \cdots + (n-1)(x-t)^{n-2}.\tfrac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} - \tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}.(x-t)^{n-1} = -\tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}.(x-t)^{n-1}$$

Définissons G sur I par :

$$G(t) = F(t) - \left(\tfrac{x-t}{x-x_0}\right)^n.F(x_0)$$

Nous avons $G(x_0) = G(x) = 0$. Par application du théorème de Rolle, il existe c entre x et x_0 tel que :

$$0 = G'(c) = F'(c) + n.\tfrac{(x-c)^{n-1}}{(x-x_0)^n}F(x_0)$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(x_0) &= -\frac{1}{n}\frac{(x-x_0)^n}{(x-c)^{n-1}}F'(c) \\ &= \frac{1}{n}\frac{(x-x_0)^n}{(x-c)^{n-1}}\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}.(x-c)^{n-1} \\ &= \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(c) \end{aligned}$$

qui donne la formule attendue.

5.3.1 Exemples et remarques

- Si $x_0 = 0$, la formule de Taylor-Lagrange s'écrit :

$$f(x) = f(0) + \tfrac{f^{(1)}(0)}{1!}.x + \tfrac{f^{(2)}(0)}{2!}.x^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \tfrac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}x^n$$

  avec ξ dans l'intervalle $]0,x[$ ou $]x,0[$ selon que x est positif ou négatif.

- En particulier pour $f(x) = \sin(x)$, pour $x_0 = 0$ et $n = 5$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(0) + \frac{\sin^{(1)}(0)}{1!}.x + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2!}.x^2 + \frac{\sin^{(3)}(0)}{3!}.x^3 + \frac{\sin^{(4)}(0))}{4!}.x^4 + \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cos\xi \end{aligned}$$

  avec ξ entre 0 et x.

- Si $f(x) = \cos(x)$, pour $x_0 = 0$ et $n = 5$, nous avons :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(0) + \frac{\cos^{(1)}(0)}{1!}.x + \frac{\cos^{(2)}(0)}{2!}.x^2 + \frac{\cos^{(3)}(0)}{3!}.x^3 + \frac{\cos^{(4)}(0))}{4!}.x^4 + \frac{\cos^{(5)}(\xi)}{5!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}\sin\xi \end{aligned}$$

  avec ξ entre 0 et x. On en déduit l'encadrement suivant :

$$1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - \tfrac{x^5}{120} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} + \tfrac{x^5}{120}$$

5.3.2 Autre formulation de la formule de Taylor-Lagrange

Un simple changement de notations dans la formulation précédente de la formule de Taylor-Lagrange donne aussi le :

Théorème 5.3 *(Formule de Taylor-Lagrange, autre forme)*

Supposons que $f(x)$ et ses dérivées $f', f'', ..., f^{(n)}$ existent et soient continues dans un intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$ et supposons que $f^{(n+1)}$ existe dans un intervalle ouvert $a < x < b$. Alors, $\forall c \in [a, b]$, on peut écrire :

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + R_n(x)$$

où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \xi \in [c, x]$ tel que le reste peut-être mis sous la forme suivante :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1} \tag{12}$$

5.3.3 Formule de Cauchy du reste

On peut aussi dans le théorème précédent donner une autre forme au reste, la forme de Cauchy :

Théorème 5.4 *(Forme de Cauchy du reste) :*
Le reste peut-être mis sous la forme suivante :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.(x-c) \tag{13}$$

Preuve
Le théorème de la moyenne :

Théorème 5.5 *Pour toute fonction à valeurs réelles, définie et continue sur $[a, b]$, il existe un réel ξ compris entre a et b, a et b étant exclus, vérifiant :*

$$f(\xi) = \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

donne ici directement :

$$\tfrac{1}{n!} \int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t = \tfrac{1}{n!}(x-c)(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)$$

5.4 La formule de Taylor-Young

Théorème 5.6 *(Formule de Taylor-Young)*

Soit I un intervalle ouvert contenant x_0, et soit f une fonction n fois dérivable dans I telle que $f^{(n)}$ soit continue en x_0 (cette hypothèse est vérifiée si $f^{(n+1)}(x_0)$ existe). Alors il existe une fonction ε, définie au voisinage de 0, telle que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}h^n + h^n \varepsilon(h) \tag{14}$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Preuve
Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n, nous avons :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.h+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_h h)}{(n)!}h^n$$

avec $\theta_h\in]0,1[$ (nous utilisons la notation θ_h pour bien indiquer que θ_h dépend de h.
Posons $\varepsilon(h)=\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0+\theta_h h)-f^{(n)}(x_0)\right)$. Nous avons :

$$\lim_{h\to 0}(x_0+\theta_h.h)=x_0 \text{ et } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

car $f^{(n)}$ est continue en x_0, ce qui prouve le théorème.

5.5 Séries de Taylor et de Mac Laurin

5.5.1 Introduction

Si toutes les dérivées de f existent, on peut explorer la forme sans reste :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n \tag{15}$$

La question est évidemment de voir si cette série converge, et si elle converge vers $f(x)$.
La série précédente porte le nom de **série de Taylor** (ou **de Mac Laurin** si $c=0$).

Même si toutes les dérivées existent, le développement en série proposé n'est pas forcément correct, car la série peut ne pas converger vers $f(x)$. La détermination des valeurs de fonctions peut toutefois se faire avec une bonne approximation par les polynômes de Taylor.

Exemple :
Calculons la valeur approchée de la fonction $\sin(x)$ en $x=0,3$ en utilisant le polynôme de Taylor d'ordre 4.
Le développement de Mac Laurin à l'ordre 5 est :

$$\sin x\approx 0+x-0-\tfrac{1}{3!}x^3+0+\tfrac{1}{5!}x^5$$

Les polynômes de Taylor à l'ordre 3 et 4 valent :

$$\mathcal{P}_3(x)=\mathcal{P}_4(x)=x-\tfrac{x^3}{3!}$$

et le reste d'ordre 4 (sous la forme de lagrange) vaut :

$$R_4(x)=\tfrac{1}{5!}f^{(5)}(\xi)x^5=\tfrac{1}{5!}\cos\xi x^5$$

On a donc :

$$\mathcal{P}_4(0,3)=0,3-\tfrac{1}{6}(0,3)^3\approx 0,2945$$

La précision de cette aproximation peut être déterminée en examinant le reste :

$$|R_4|=\left|\tfrac{1}{5!}\cos\xi(0,3)^5\right|\leqslant\tfrac{1}{120}\tfrac{243}{10^5}<0,000021$$

L'approximation est donc correcte à 4 décimales.

5.5.2 Convergence des séries de Taylor et de Mac Laurin

Montrons que certaines fonctions sont représentées par leur série de Taylor en montrant que $R_n(x)\to 0$ lorsque $n\to\infty$.

Par la formule de Taylor, comme :

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\tfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

si $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, alors :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

et $f(x)$ est égale à sa série de Taylor.

Remarque :
On a toujours $\lim_{n\to\infty} \frac{d^n}{n!} = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}$. En effet, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et converge donc $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc, son terme général tend forcément vers zéro et on a bien $\lim_{n\to\infty} \frac{d^n}{n!} = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}$.

Exemples :

- La fonction $\sin x$ est égale à sa série de Mac Laurin (ou de Taylor si $c \neq 0$).
  Si $f(x) = \sin x$, toutes les dérivées sont égales à $\pm \sin x$ ou $\pm \cos x$ et on a donc $|f^{(n)}(x) \leqslant 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right| \\ &\leqslant \left| \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \end{aligned}$$

  Par la remarque ci-dessus, $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$ et on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
  Donc $\sin x$ est égal à sa série de Mac Laurin et on a :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{16}$$

  Comme le rayon de convergence de cette série est infini, cette égalité est valable $\forall x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $\cos x$ est égale à sa série de Taylor.
  Pour le voir on peut utiliser le fait que l'on peut dériver terme à terme une série entière. On obtient en dérivant la série précédente :

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)!} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned} \tag{17}$$

  Comme le rayon de convergence de cette série est infini, cette égalité est valable $\forall x \in \mathbb{R}$.

- La fonction e^x est égale à sa série de Mac Laurin.
  En effet, la fonction e^x est sa propre dérivée, donc $f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1 \quad _foralln \in \mathbb{N}$, donc :

$$|R_n(x)| = e^{\xi} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \to 0 \quad \text{lorsque} n \to \infty$$

  par la remarque précédente et on a donc :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{18}$$

  Remarque : on savait déjà que la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ convergeait $\forall x \in \mathbb{R}$. Appelons $f(x)$ sa somme. En dérivant terme à terme, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) \end{aligned}$$

  où l'on a posé dans la dernière équation $n = k-1$. Comme on a de plus $f(0) = 1$, on conclut que $f(x) = e^x$ car e^x est par définition la seule fonction qui est sa propre dérivée et qui vaut 1 en $x = 0$.

- **La série binomiale**.
  Considérons la série suivante :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tbinom{r}{n} x^n \quad \forall r \neq 0$$

Cette série converge pour $|x < 1|$; en effet, par le test du rapport (critère de d'Alembert), on a :

$$\left| \tfrac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \left| \tfrac{r(r-1)\ldots(r-n-1+1)}{(n+1)!} \tfrac{n!}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} \tfrac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \tfrac{1}{n+1} |r-n| \, |x|$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |r-n| \, |x| = |x|$. Si $|x| < 1$, la série converge donc. Essayons de déterminer vers quelle somme. Posons $y(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$. Comme cette série converge $\forall x$ tel que $|x| < 1$, on peut dériver terme à terme :

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = \sum_{n=1}^{\infty} \tbinom{r}{n} n x^{n-1}$$

Multiplions par $(1+x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1+x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} n x^{n-1} (1+x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} n x^n \\
&= r + \sum_{n=2}^{\infty} \binom{r}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} n x^n \\
&= r + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k+1} (k+1) x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k} k x^k
\end{aligned} \tag{19}$$

où l'on a posé $k = n - 1$ dans la première série et $k = n$ dans la seconde.

Les deux séries ont pour somme la série suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} r \tbinom{r}{k} x^k$$

car :

$$\begin{aligned}
\binom{r}{k+1}(k+1) + \binom{r}{k} k &= \frac{r!(k+1)}{(k+1)!(r-k-1)!} + \frac{r!k}{k!(r-k)!} \\
&= \frac{r!}{k!(r-k-1)!} + \frac{r!k}{k!(r-k-1)!(r-k)} \\
&= \frac{r!(r-k) + r!k}{k!(r-k-1)!(r-k)} \\
&= \frac{rr!}{k!(r-k-1)!(r-k)} \\
&= r\binom{r}{k}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$(1+x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = r + r\sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k} x^k = ry$$

On peut trouver la fonction $y(x)$, solution de cette équation différentielle en utilisant la méthode de séparation des variables :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{r}{1+x} \mathrm{d}x$$

ou encore :

$$\ln y = r \ln(1+x) + K$$

c'est-à-dire :

$$y = k(1+x)^r$$

Comme $y(0) = 1$, on déduit directement $k = 1$. Finalement, on a donc prouvé le résultat suivant :

Théorème 5.7 *(Série binomiale)*

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)...(r-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \quad \forall r \neq 0 \quad \forall x \textit{ tel que } |x| < 1 \qquad (20)$$

Remarque :

La série binomiale :

- se réduit à une somme finie si p est un entier positif ou nul ;
- converge absolument pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$ si $p > 0$ et $p \notin \mathbb{Z}$;
- converge pour $-1 < x < 1$ si $-1 < p < 0$;
- converge pour $-1 < x < 1$ si $p \leqslant -1$

La série binomiale converge donc certainement $\forall p$ sur $-1 < x < 1$.

5.5.3 Quelques importants développements en séries de puissances

$$\begin{aligned}
(1+x)^a &= 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x<1\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x<1\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1\leqslant x<1\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x\leqslant 1\\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x<1\\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+ \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\cdots\\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots+\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots,\\
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\mathrm{th}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\mathrm{Arcsin}(x) &= x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+\cdots \quad \text{converge pour } -1\leqslant x\leqslant 1\\
\mathrm{Arccos}(x) &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+\cdots \text{converge pour } -1\leqslant x\leqslant 1\\
\mathrm{Argsh}(x) &= x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+\cdots\\
\mathrm{Arctan}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1\leqslant x\leqslant 1\\
\mathrm{Argth}(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots
\end{aligned}$$

Remarque : les coefficients B_n qui apparaissent dans le développement limité de la fonction tangente sont les nombres de Bernoulli)

Exercice 7

- Calculer la série de Taylor de $y=\frac{1}{x}$ autour de 1 ; quel est son intervalle de convergence ?
- Développer $y=\frac{1}{10+x}$ en puissances de x ; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?
- Développer $y=\cos x$ en puissances de $(x-\frac{\pi}{4})$; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?
- Développer $y=e^{-x}$ en série de Mac Laurin ; estimer $y(1)$ avec les polynômes de Taylor $\mathcal{P}_0(x), \mathcal{P}_1(x), \mathcal{P}_2(x), \mathcal{P}_3(x), \mathcal{P}_4$ et comparer à la valeur donnée par la machine ; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?
- Développer $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ en série de puissances de $(x-1)$; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?

- Trouver le développement autour de 0 de $\cos x^2$, xe^{-2x}, $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

5.6 Séries entières de variables complexes

On s'intéresse ici à des séries de puissances du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.z^n$ où $z = x + jy$ est une variable complexe et les a_n peuvent aussi être des complexes. Ces séries se traitent comme les séries réelles. En particulier, elles convergent pour $|z| < R$ c'est-à-dire à l'intérieur d'un disque limité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ où R est le rayon de convergence de la série (qui peut être nul ou infini). Sur la frontière du disque, c'est-à-dire pour $|z| = R$, la série peut converger ou non, selon z. Pour $y = 0$, le disque de convergence se réduit à l'intervalle de convergence des séries de puissances réelles.

Exemple : étudions la convergence de la série complexe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n^3 3^{n-1}}$.

Comme :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^n}{(n+1)^3 3^n} \frac{n^3 3^{n-1}}{z^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \frac{1}{3} |z| = \frac{1}{3}|z|$$

la série converge pour $|z| < 3$ et diverge pour $|z| > 3$. Pour $|z| = 3$, la série des valeurs absolues est : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n^3 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ qui converge comme p-série avec $p = 3$, donc la série converge absolument et donc simplement pour $|z| = 3$.

5.6.1 Application : l'exponentielle complexe

Définition

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$. En effet $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|}{n!}$ converge puisque :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et donc converge simplement.

Définisssons alors la somme de cette série comme étant une nouvelle fonction complexe de variable complexe, et notons la $\exp(z)$.

Propriétés

- On a bien sûr $\exp(0) = 1$.

- Calculons la dérivée de cette fonction :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{z^(n-1)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m = \exp(z)$$

  où l'on a posé $m = n - 1$.Cette fonction est donc sa propre dérivée.

- $\forall a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$\exp(a). \exp(b) = \exp(a + b) \tag{21}$$

  En effet, on a :

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{n!}\Big|_{z=1} \quad \text{et} \quad \exp(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n z^n}{n!}\Big|_{z=1}$$

Le produit de deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ donne une série $\sum c_n z^n$ avec :

$$\begin{aligned}
c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \\
&= \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1}b}{(n-1)!.1} + \cdots + \frac{ab^{n-1}}{1.(n-1)!} + \frac{b^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \frac{1}{n!} (a+b)^n
\end{aligned}$$

La série $\sum c_n.z^n$ a donc pour somme $\exp((a+b)z)$ et sa valeur en 1 est $\exp(a+b)$.On notera donc pour plus de commodité et comme on le fait dans $\mathbb{R}$ la fonction $\exp(z) = e^z$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
e^{jx} &= \cos x + j \sin x && (22) \\
e^{-jx} &= \cos x - j \sin x && (23)
\end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
e^{\pm jx} &= 1 \pm jx - \frac{x^2}{2!} \mp j \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \pm j \left(x - \frac{x^3}{3! + \cdots}(\right) \\
&= \cos x \pm j \sin x
\end{aligned}$$

Ce sont les **formules d'Euler**, très utiles notamment pour retrouver rapidement les formules de trigonométrie circulaire.

Exercice 8
Prouver les formules d'addition suivantes en utilisant les propriétés de l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Suites numériques **1**
2.1 Définition 1
2.2 Exemples 1
2.3 Limite finie de suite 3
2.3.1 Définition 3
2.3.2 Exemples de suites réelles convergentes 3
2.4 Limite infinie de suite 3
2.4.1 Définition 3
2.4.2 Exemple 4
2.5 Limites de suites n'existant pas 4

3 Séries numériques **5**
3.1 Définition 5
3.2 Convergence et divergence d'une série 5
3.3 Propriétés des séries 5
3.4 Séries particulières 6
3.4.1 Séries géométriques 6
3.4.2 Les $p-$séries 7
3.5 Quelques propriétés utiles aux calculs de sommes de séries 7
3.6 Séries à termes positifs, tests de convergence 8
3.6.1 Le test de comparaison (pour les séries positives) 8
3.6.2 Le test du quotient ou de comparaison à la limite (pour les séries positives) 9
3.6.3 Le test de l'intégrale (pour les séries positives) 10
3.7 Séries alternées 11
3.8 Convergence absolue et convergence conditionnelle d'une série 12
3.9 Exercices sur les séries numériques 15
3.10 Autres tests de convergence 17

4 Suites et séries de fonctions **18**
4.1 Définitions et convergence 18
4.1.1 Suite de fonctions, définition 18
4.1.2 Convergence simple et convergence uniforme des suites de fonctions 18
4.1.3 Séries de fonctions, définition 19
4.1.4 Convergence simple et convergence uniforme des séries de fonctions 19
4.1.5 Convergence normale d'une série de fonctions 20
4.2 Séries entières ou séries de puissances entières 21
4.2.1 Définition 21
4.2.2 Rayon de convergence 21
4.2.3 Séries entières réelles 23
4.2.4 Intervalle de convergence d'une série entière 24
4.2.5 Séries de puissances entières de $(x-a) \quad ,\forall a \in \mathbb{R}$ 25
4.2.6 Exercices sur les séries entières 25
4.2.7 Convergence au bord du domaine 26
4.2.8 Opérations avec les séries entières 27

5 Développements de fonctions en séries entières : séries de Taylor et de Mac Laurin **27**
5.1 Introduction 27
5.2 Théorème de Taylor 28
5.3 Formule de Taylor-Lagrange 29
5.3.1 Exemples et remarques 29
5.3.2 Autre formulation de la formule de Taylor-Lagrange 30
5.3.3 Formule de Cauchy du reste 30
5.4 La formule de Taylor-Young 30
5.5 Séries de Taylor et de Mac Laurin 31
5.5.1 Introduction 31
5.5.2 Convergence des séries de Taylor et de Mac Laurin 31

5.5.3 Quelques importants développements en séries de puissances 36
5.6 Séries entières de variables complexes 37
5.6.1 Application : l'exponentielle complexe 37