Chapitre 1 : séries numériques et séries de fonctions

1 Séries numériques

1.1 Définition

Soit une suite numérique infinie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$. On appelle **série numérique** l'expression :

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

et on note :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Les nombres $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ sont les **termes** de la série. On peut appeler u_n le **terme général** de la série. La somme des n premiers termes de la série :

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_n$$

s'appelle la **somme partielle** d'ordre n et est notée S_n.

Exemples :

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Definition (Convergence d'une série) :
Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ existe et est finie, alors S s'appelle la **somme** de la série et on dit que la série **converge** vers S.
S'il n'existe pas de nombre S tel que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ on dit que la série **diverge**.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, on dit que la série diverge vers $\pm\infty$ et on écrit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n = \pm\infty$.

Exemples :

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ diverge vers $+\infty$ de façon évidente.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ diverge car $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, etc. donc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ n'existe pas.
- Nous verrons que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge vers 2

1.2 Propriétés des séries

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Notons que la réciproque de cette propriété est fausse en général, c'est-à-dire que si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ peut ou non converger. Par exemple, nous verrons que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ bien que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- La multiplication de chaque terme d'une série par une constante non nulle n'affecte pas la convergence ou la divergence de la série.
- Enlever (ou rajouter) un nombre fini de termes à une série n'affecte pas la convergence ou la divergence de la série.

1.3 Séries particulières

1.3.1 Séries géométriques

Definition (Séries géométriques) :
Les séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$$

avec a et r constantes convergent vers :

$$S = \frac{a}{1-r} \text{ si } |r| < 1$$

et divergent si $|r| \geqslant 1$.

En effet :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$

donc :

$$rS_n = ar + a^2r + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n$$

Soustrayons membre à membre :

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

donc :

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

- Si $|r| < 1$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$ (car $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ si $|x| < 1$) ; la série converge alors vers $\frac{a}{1-r}$.
- Si $|r| > 1$, $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ car $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$ si $|x| > 1$) ; la série diverge donc vers ∞.
- Si $r = 1$, la série devient $a + a + a + ...$; on a donc $S_n = na$ et $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$; la série diverge donc vers ∞.
- Si $r = -1$, la série devient $a - a + a - a + ...$. La $\lim_{n\to\infty} S_n$ n'existe pas et la série diverge.

Exemples :

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ converge vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ comme annoncé.
- La série $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ diverge car $3 > 1$.

1.3.2 Les $p-$séries

Definition ($p-$séries) :
On appelle $p-$**séries** les séries du type :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ...$$

où p est une constante.

Ces séries convergent pour $p > 1$ et divergent pour $p \leqslant 1$.

Nous prouverons ceci plus tard avec le test de l'intégrale.

Par exemple, la $p-$série correspondant à $p = 1$, appelée **série harmonique**, est divergente. Vérifions le directement en calculant et en majorant les sommes partielles d'ordre 2^k de cette série. On a :

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{4}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{3}{2} \\
S_{16} &= = S_8 + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{8}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

En continuant de la même manière, on montre que $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$ quand $k > 1$. Ceci implique que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Notons que pourtant, on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.4 Quelques propriétés utiles aux calculs de sommes de séries

- Si $c \neq 0$ la série $\sum cu_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. De plus, dans le cas de la convergence, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

- Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

- Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(u_n - v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

1.5 Séries à termes positifs, tests de convergence

Le plus souvent, la valeur exacte d'une série ne peut être obtenue. On se tourne alors vers la question de sa convergence ou de sa divergence. Les tests suivants aident à trancher cette question.

1.5.1 Le test de comparaison (pour les séries positives)

Théorème 1.1 *(Test de comparaison) :*

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries positives (c'est-à-dire telles que $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$) telles qu'à partir d'un certain entier positif m on ait $a_k \leqslant b_k$ $\forall k \geqslant m$, alors :

- *Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.*
- *Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.*

Exemples :

- Comme $\frac{1}{2^n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, alors $\sum \frac{1}{2^n+1}$ converge aussi.
- Comme $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge aussi.
- $\sum \frac{1}{n^2+5}$ converge car $\frac{1}{n^2+5} < \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (comme p-série avec $p = 2$).
- $\sum \frac{1}{3n+5}$ diverge car en posant $a_n = \frac{1}{4n}$ et $b_n = \frac{1}{3n+5}$ on a $a_n \leqslant b_n \forall n \geqslant 5$. En effet, $\frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{3n+5} \iff 3n+5 \leqslant 4n \iff n \geqslant 5$ et $\sum a_n$ diverge.
- $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n}$ converge car $\frac{1}{n^n} \geqslant \frac{1}{2^n} \forall n \geqslant 2$ et $1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge puisque c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$.

1.5.2 Le test du quotient ou de comparaison à la limite (pour les séries positives)

Théorème 1.2 *(Test du quotient) :*

- *Si $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$ et $\neq$ de l'∞ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux (en d'autres mots, $\sum u_n$ converge $\iff$ $\sum v_n$ converge).*
- *Si $A = 0$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $A = \infty$ et si $\sum v_N$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.*

Exemples :

- $\sum \frac{3n^2-5n+4}{7n^3+2}$ diverge car $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{3n^2-5n+4}{7n^3+2} . \frac{n}{1}\right] = \frac{3}{7}$ et que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- $\sum \frac{5n-2}{\sqrt{n^6-4n^2+7}}$ converge car $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{5n-2}{\sqrt{n^6-4n^2+7}} . \frac{n^2}{1}\right] = 5$ et que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

En utilisant ce test avec $v_n = \frac{1}{n^p}$ ($p-$série), on a le résultat suivant :

Corollaire 1.3
Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n n^p = A$, $\sum u_n$ converge si $p > 1$ et A est fini et $\sum u_n$ diverge si $p \leqslant 1$ et $a \neq 0$ (A peut être égal à l'infini).

Exemples :

- $\sum \frac{n}{4n^3-2}$ converge car $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 . \frac{n}{4n^3-2} = \frac{1}{4}$
- $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ diverge car $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} . \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = \infty$.

1.5.3 Le test de l'intégrale (pour les séries positives)

Théorème 1.4 *(Test de l'intégrale) :*

Si $\sum s_n$ *est une série positive et* $f(x)$ *une fonction continue, positive et décroissante sur* $[1, +\infty[$ *telle que* $f(n) = s_n \quad \forall n$ *alors :*

$$\sum s_n \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Exemples :

- $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge car en posant $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^u \\ &= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2}(\ln u)^2 = +\infty\end{aligned}$$

  donc par le test de l'intégrale, $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car en posant $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^u \\ &= \lim_{u\to\infty} \left(-\frac{1}{u} + 1\right) = +1\end{aligned}$$

  donc par le test de l'intégrale, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Application : convergence et divergence des $p-$séries.
On a vu que les séries $\sum \frac{1}{n^p}$ avec p constant sont appelées $p-$séries.Montrons que :

- Si $p > 1$ les $p-$séries convergent.
- Si $p \leqslant 1$ les $p-$séries divergent.

Supposons $p \neq 1$ (on sait déjà que la série harmonique diverge).
On peut aussi supposer $p > 0$, car si $p \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$ et la série diverge directement puisque son terme général ne tend pas vers zéro.
Appliquons le test de l'intégrale avec $f(x) = \frac{1}{x^p}$ (qui est bien une fonction positive et décroissante sur $[1, +\infty[$).
Comme on a :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x &= \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^u \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right]\end{aligned}$$

- Si $p > 1$ alors $p - 1 > 0$ et $\lim\limits_{u\to\infty} u^{1-p} = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{1}{u^{p-1}} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}$ et $\sum \frac{1}{n^p}$ converge.
- Si $p < 1$ alors $p - 1 < 0$ et $\lim\limits_{u\to\infty} u^{1-p} = +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = +\infty$ et $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge.

Remarque :
On peut traiter le cas de la série harmonique avec ce critère puisque si $p = 1$, $\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to\infty} [\ln x]_1^u = +\infty$ et la série harmonique diverge donc bien.

1.6 Séries alternées

Une **série alternée** est une série dont les termes sont tour à tour positifs et négatifs, c'est-à-dire une série de la forme :

$$\sum(-1)^{n+1}a_n \quad = \quad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

où les a_n sont tous positifs.

Théorème 1.5 *(Théorème des séries alternées) :*
Soit $\sum(-1)^{n+1}a_n$ *une série alternée. Si la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *alors :*

- $\sum(-1)^{n+1}a_n$ *converge vers une somme* A.
- *Si* A_n *est la* $n^{ième}$ *somme partielle de cette série et si* $R_n = A - A_n$ *est l'erreur correspondante, alors* $|R_n| < a_{n+1}$ *(c'est-à-dire que l'erreur est plus petite en valeur absolue que le premier terme omis).*

Remarque :
La somme d'une série alternée est donc positive et comprise entre $a_1 - a_2$ et a_1.
En effet, $R_1 = A - A_1 = A - a_1 < 0$ et $|R_1| < a_2 \to |A - a_1| = -A + a_1 < a_2$ donc $A > a_1 - a_2$.

Exemple :
La **série harmonique alternée** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ est convergente et sa somme A est comprise entre $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et 1. Nous verrons plus loin que $A = \ln 2 \approx 0,693....$

1.7 Convergence absolue et convergence conditionnelle d'une série

Definition (Convergence absolue et convergence conditionnelle) :

Considérons une série $\sum s_n$.

- $\sum s_n$ est dite absolument convergente $\Longleftrightarrow$ $\sum |s_n|$ converge.
- $\sum s_n$ est dite conditionnellement convergente $\Longleftrightarrow$ la série converge sans converger absolument.

Exemple : la série $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ est conditionnellement convergente.

Théorème 1.6 *(Théorème de réarrangement des termes) :*

- *Si* $\sum s_n$ *est absolument convergente, alors tout réarrangement de* $\sum s_n$ *(c'est-à-dire un changement de l'ordre dans lequel les termes arrivent) est convergent et a la même somme que la série* $\sum s_n$.
- *Si* $\sum s_n$ *est conditionnellement convergente,* $\forall c \in \mathbb{R}$ *fini ou infini, il y a un réarrangement des termes de* $\sum s_n$ *de somme c (la série peut donc converger vers n'importe quelle somme).*

Théorème 1.7 *(La convergence absolue implique la convergence simple) :*

Si une série converge absolument, elle converge simplement.

Les critères suivants permettent d'étudier la convergence absolue de séries :

Théorème 1.8 *(Test du rapport ou critère de d'Alembert) :*

Soit $\sum s_n$ *une série,*

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r < 1$, *la série* $\sum s_n$ *converge absolument.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r > 1$ *(ou* $r = +\infty$*) la série* $\sum s_n$ *diverge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r = 1$, *on ne peut tirer aucune conclusion.*

Théorème 1.9 *(Test de la racine ou critère de Cauchy) :*

Soit $\sum s_n$ *une série,*

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r < 1$, *la série* $\sum s_n$ *converge absolument.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r > 1$, *(ou* $r = +\infty$*) la série* $\sum s_n$ *diverge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r = 1$, *on ne peut tirer aucune conclusion.*

Exercice 1
Utiliser le test du rapport pour étudier la convergence des séries suivantes :

- $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + ...$
- $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + ...$
- $1 + \frac{1.2}{1.3} + \frac{1.2.3}{1.3.5} + \frac{1.2.3.4}{1.3.5.7} + ...$
- $2 + \frac{3}{2}.\frac{1}{4} + \frac{4}{3}.\frac{1}{4^2} + \frac{5}{4}.\frac{1}{4^3} + ...$
- $1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + ...$
- $\sum \frac{n3^n}{(n+1)!}$
- $\sum \frac{n^n}{n!}$

Exercice 2
Déterminer si les séries alternées suivantes sont absolument convergentes, conditionnellement convergentes ou divergentes.

- $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{3n+1}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+2}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(n!)^2}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^4+2}$
- $\sum(-1)^{n+1}n\left(\frac{3}{4}\right)^4$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^2-3}{n^2+n+2}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^n}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^{n+2}}$
- $\sum(-1)^{n+1}\frac{\cos \pi n}{n^2}$

Exercice 3

- Combien de termes de $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ suffisent pour obtenir une approximation à $0,0005$ de la somme ? Trouver cette approximation.
- Idem pour $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$
- Idem pour $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

Exercice 4
Déterminer la convergence éventuelle des séries :

- $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- $\sum \frac{(2sn)!)}{n^4}$
- $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$
- $\sum \frac{3^n}{n!}$
- $\sum \frac{4^n}{(n+2)^n}$
- $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Autres tests de convergence

Théorème 1.10 *(Test de Raabe) :*

Posons $L = \lim\limits_{n \to \infty} n \left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ *alors la série* $\sum u_n$ *:*

- *converge absolument si* $L > 1$
- *diverge ou converge conditionnellement si* $L < 1$

Si $L = 1$*, le test ne permet pas de conclure*

Théorème 1.11 *(Test de Gauss) :*

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^q}$ *où* $|c_n| < P \quad \forall n > \mathbb{N}$ *(c'est-à-dire si la suite* c_n *est bornée) alors la série* $\sum u_n$

- *converge absolument si* $L > 1$
- *diverge ou converge conditionnellement si* $L \leqslant 1$

2 Séries de fonctions

2.1 Définition

2.1.1 Convergence et convergence uniforme des suites de fonctions

Soit $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b]$. La suite est dite **convergente** vers $F(x)$ ou est dite avoir pour limite $F(x)$ sur $[a,b]$ ssi :

$$\forall\varepsilon>0 \text{ et } \forall x\in[a,b] \text{ on peut trouver } N>0 \text{ tel que } \forall n>N, \qquad |u_n(x)-F(x)|<\varepsilon.$$

Le nombre N peut dépendre à la fois de x et de ε. S'il dépend uniquement de ε (et pas de x), la suite est dite **uniformément convergente** vers $F(x)$ sur $[a,b]$.
La convergence uniforme d'une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une forme de convergence plus exigente que la convergence simple. La convergence devient uniforme quand toutes les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ avancent vers leur limite respective avec une sorte de « mouvement d'ensemble ».
Dans le cas de fonctions numériques d'une variable, la notion prend une forme d'« évidence » géométrique : le graphe de la fonction f_n se « rapproche » de celui de la limite.

2.1.2 Convergence et convergence uniforme des séries de fonctions

La série de fonctions :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots$$

est dite **convergente** sur $[a,b]$ si la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$ est convergente sur $[a,b]$. Dans ce cas on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$ et on appelle $S(x)$ la somme de la série.
Il en résulte que :

$$\sum u_n(x) \text{ converge vers } S(x) \text{ sur } [a,b] \text{ ssi } \forall\varepsilon>0 \text{ et } \forall x\in[a,b] \text{ on peut trouver } N>0 \text{ tel que}$$
$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon \quad \forall n>N.$$

Si N dépend seulement de ε (et pas de x) la série est appelée **uniformément onvergente** sur $[a,b]$. De façon équivalente, si on pose $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$, la série $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$ si $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N$ dépendant de ε (mais pas de x) tel que $|R_n(x)|<\varepsilon \quad \forall n>N$ et $\forall x\in[a,b]$

Exemples :

2.2 Séries entières ou séries de puissances entières

Une **série entière** est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$

où les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite réelle ou complexe. La série est dite **entière** du fait qu'elle fait intervenir des puissances entières.

Les séries entières possèdent des propriétés de convergence remarquables, qui s'expriment pour la plupart à l'aide d'une grandeur associée à la série, son **rayon de convergence** R. Sur le disque de convergence (disque ouvert de centre 0 et de rayon R), la fonction somme de la série peut être dérivée indéfiniment terme à terme.
Une bonne partie des propriétés de convergence de la série peut être exprimée à l'aide de la quantité suivante, appelée **rayon de convergence** de la série :

$$R=\sup\left\{|z|, z\in\mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge }\right\}\in\mathbb{R}^+\bigcup\{+\infty\}$$

Ces propriétés se fondent sur le lemme suivant, dû à Abel, mais qu'il ne faut pas confondre avec le théorème d'Abel, lequel est utilisé pour démontrer la continuité de la somme de la série à la frontière du disque de convergence.

Lemme 2.1 *(Lemme d'Abel) :*
Soit un réel $r_0 > 0$. Si la suite de terme général $|a_n|r_0^n$ est bornée, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge absolument pour $|z| < r_0$.

Dans l'ensemble des nombres réels, la série de puissances $\sum a_n x^n$ converge pour $|x| < R$, c'est-à-dire dans un intervalle de convergence $-R < x < R$, et diverge pour $|x| > R$. Pour $|x| = R$, la série peut converger ou non. Les cas particuliers $R = 0$ et $R = \infty$ peuvent arriver. Dans le premier cas, la série converge seulement pour $x = 0$, dans le second cas, elle converge $\forall x$.

2.2.1 Théorèmes sur les séries de puissances

Théorème 2.2 *(Convergence uniforme des séries enières) :*
Une série de puissances converge uniformément et absolument sur tout intervalle qui se trouve entièrement dans son intervalle de convergence (c'est-à-dire $\forall x$ tel que $-R < x < R$).

Théorème 2.3 *(Intégration des séries enières) :*
Soit $f(x)$ la fonction définie par la série de puissances $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur son intervalle de convergence (c'est-à-dire $\forall x$ tel que $-R < x < R$, alors :

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \text{ pour } |x| < R \tag{1}$$

où l'intervalle de convergence de la série de puissances de droite est le même que celui de la série originale.

En d'autres mots, la primitive de $f(x)$ s'obtient par une intégration terme à terme de la série de puissances associée à la fonction $f(x)$.
De la même manière, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \tag{2}$$

Théorème 2.4 *(Dérivation des séries enières) :*
Soit $f(x)$ la fonction définie par la série de puissances $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur son intervalle de convergence (c'est-à-dire $\forall x$ tel que $-R < x < R$, alors :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n x^{n-1} \text{ pour } |x| < R \tag{3}$$

où l'intervalle de convergence de la série de puissances de droite est le même que celui de la série originale.

En d'autres mots, la dérivée de $f(x)$ s'obtient par une dérivée terme à terme de la série de puissances associée à la fonction $f(x)$.

Exemples :

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...$ est une série géométrique de raison x. Elle converge donc pour $|x| < 1$ et sa somme est $\frac{1}{1-x}$.

Comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ... \qquad \forall|x| < 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\end{aligned}$$

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$ est une série géométrique de raison $-x$. Elle converge donc pour $|x| < 1$ et sa somme est $\frac{1}{1+x}$.
  On a en intégrant :

$$\int \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + K = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + K$$

et donc :

$$\ln|1+x| = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + K \qquad \forall|x| < 1$$

En calculant les deux membres en $x = 0$, on obtient $K = 0$ et donc finalement, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... \qquad \forall|x| < 1 \tag{4}$$

Remarque : comme $|x| < 1, -1 < x < 1$ et $0 < 1 + x < 2$ donc $|1 + x| = 1 + x$.

En remplaçant x par $x - 1$, on a aussi :

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + ... \qquad \forall|x-1| < 1 \text{ c'est-à-dire pour } 0 < x < 2$$

donc la fonction $\ln x$ est définie par une série entière sur $]0, 2[$.

2.2.2 Intervalle de convergence d'une série entière

Soit la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Considérons la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. C'est une série positive $\forall x$. Par le test de d'Alembert, la série $\sum a_n x^n$ converge si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L|x| < 1$, donc si $|x| < \frac{1}{L}$ avec $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Donc, le rayon de convergence d'une série entière vaut :

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

On a donc :

Théorème 2.5 *(Intervalle de convergence des séries entières) :*
Une série entière réelle converge donc sur un intervalle $-R < x < R$ avec :

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{5}$$

Exemples :

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ converge absolument (et donc converge) $\forall x \in \mathbb{R}$ car :

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1} = \infty.$$

L'intervalle de convergence de cette série est donc $-\infty < x < \infty$. Nous verrons plus loin que la somme de cette série correspond à la fonction exponentielle naturelle e^x.

- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + ...$ ne converge qu'en $x = 0$ car :

$$L = \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1} = \infty.$$

donc $R = 0$, le rayon de convergence est nul.

2.2.3 Séries de puissances entières de $(x - a) \quad , \forall a \in \mathbb{R}$

Par un simple changement de variable $x \to (x - a)$, on peut appliquer tous les résultats précédents aux séries entières du type :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

En particulier, ces séries convergent pour x appartenant à un intervalle centré sur a et de rayon R, c'est-à-dire $\forall x$ tel que $|x - a| < R$ ou encore $-R + a < x < R + a$.

Exemple :
La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à :

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

et converge donc si $|x - 2| < 1$, c'est-à-dire entre $1 < x < 3$.
Au point $x = 1$, la série devient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge (c'est la série harmonique alternéee).
Au point $x = 3$, la série devient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge (c'est la série harmonique).
Cette série converge donc sur l'intervalle $[1, 3[$.

Exercice 5
Trouver les intervalles de convergence des séries de puissances suivantes :

- $\sum nx^n$
- $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$
- $\sum \frac{x^n}{n5^n}$
- $\sum \frac{x^{2n}}{n(n+1)(n+2)}$
- $\sum \frac{x^{n+1}}{(\ln(n+1))^2}$
- $\sum \frac{x^n}{1+n^3}$
- $\sum \frac{(x-4)^n}{n^2}$
- $\sum \frac{(3x-2)^n}{5^n}$
- $\sum \frac{x^n}{n^2}$
- $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + ...$
- $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + ...$
- $1 + \frac{100x}{1.3} + \frac{10000x^2}{1.3.5} + \frac{1000000x^3}{1.3.5.7} + ...$
- $\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - ...$
- $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
- $1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + ...$
- $(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + ...$
- $x + \frac{2^k}{2!}x^2 + \frac{3^k}{3!}x^3 + ...$
- $x + \frac{2!}{2^2}x^2 + \frac{3!}{3^2}x^3 + ...$
- $\sum \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

Le théorème suivant permet d'étendre la formule de la somme d'une série de puissances jusqu'au bord du domaine de convergence.

Théorème 2.6 *(Théorème d'Abel) :*
Si une série de puissances $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *a un intervalle de convergence fini* $|x-c| < R$*, et si* $f(x)$ *est la fonction dont les valeurs sur cet intervalle sont données par la série de puissances, si la série de puissances converge aussi au point extrême à droite (resp. à gauche)* $b = c + R$ *(resp.* $a = c - R$*, alors* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ *(resp.* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$*) existe et est égale à la somme de la série en* b *(resp. en* a*).*

Exemples :

- On a $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^(n-1)\frac{x^n}{n} \quad \forall |x| < 1$. Au point extrême à droite, $x = 1$, la série devient la série harmonique alternée qui converge. Par Abel, cette série est égale à $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$, donc $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}....$

- Repartons de $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...$ pour $|x| < 1$.
  Remplaçons x par $-x^2$ pour obtenir :

  $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - ... \text{ pour } |x| < 1 car |-x^2| < 1 \iff |x| < 1$$

  En intégrant les deux membres, on a :

  $$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + K \text{ pour } |x| < 1 \\ &= K + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + ... \end{aligned}$$

  où K est une constante d'intégration.

  En $x = 0$, on a : $0 = K + 0 + ...$ donc $K = 0$. Il s'ensuit que :

  $$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \tag{6}$$

  Au point extrême $x = -1$, la série devient :

  $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

  qui converge par le théorème des séries alternées. Donc par le théorème d'Abel, on a :

  $$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{7}$$

2.2.4 Opérations avec les séries entières

Nous supposons dans les théorèmes suivants que les séries de puissances convergent dans un certain intervalle.

Théorème 2.7 *(Somme et différence de deux séries entières) :*
Deux séries de puissances $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *et* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ *peuvent être ajoutées ou soustraites terme par terme* $\forall x$ *appartenant aux deux intervalles de convergence*

Théorème 2.8 *(Multiplication de deux séries entières) :*
Deux séries de puissances , par exemple $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ *peuvent être multipliées pour obtenir une série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ $\forall x$ *appartenant aux deux intervalles de convergence, avec :*

$$c_n = a_0.b_n + a_1.b_{n-1} + a_2.b_{n-2} + ... + a_{n-1}.b_1 + a_n.b_0 \tag{8}$$

3 Développements de fonctions en séries entières : séries de Taylor et de Mac Laurin

3.1 Introduction

Un moyen simple pour explorer es représentations en série de fonctions est de supposer qu'une telle représentation existe et de découvrir les détails. Bien sûr, tout ce qui est trouvé doit être confirmé de manière rigoureuse. Supposons qu'une fonction $f(x)$ puisse être représentée par :

$$f(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \cdots + A_n(x-c)^n + \cdots$$

au voisinage de c.

Notons que les coefficients A_n peuvent être reliés aux dérivées successives de f. En particulier, on a :

$$A_0 = f(c), \qquad A_1 = f'(c) \qquad A_2 = \tfrac{f''(c)}{2!} \qquad , \cdots , \qquad A_n = \tfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Ceci suggère qu'une représentation en série de $f(x)$ est :

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \tfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

Un premier pas pour formaliser la représentation en série d'une fonction f pour laquelle les dérivées existent jusqu'à l'ordre n est réalisé en introduisant les polynômes de Taylor de la fonction :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0(x) &= f(c) \\
\mathcal{P}_1(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) \\
\mathcal{P}_2(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 \\
&\dots \\
\mathcal{P}_n(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x-c)^i
\end{aligned}$$

où $f^{(i)}$ désigne la dérivée $i^{\text{ème}}$ de la fonction f.

3.2 Théorème de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor (1685-1731), qui l'établit en 1712, donne une **approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un poin**t par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Théorème 3.1 *(Formule de Taylor) :*
Supposons que $f(x)$ *et ses dérivées* $f', f'', ..., f^{(n)}$ *existent et soient continues dans un intervalle fermé* $a \leqslant x \leqslant b$ *et supposons que* $f^{(n+1)}$ *existe dans un intervalle ouvert* $a < x < b$*. Alors,* $\forall c \in [a, b]$*, on peut écrire :*

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + R_n(x)$$

où :

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \tag{9}$$

désigne le reste sous forme intégrale.

Preuve
On raisonne par récurrence sur n.
Le théorème est vrai pour $n = 0$ car on a bien :

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\mathrm{d}t = f(c) + [f(t)]_c^x = f(c) + f(x) - f(c)$$

Supposons (hypothèse de récurrence) le théorème vrai pour $n = k$ et montrons qu'il est alors vrai pour $n = k+1$. On a donc :

$$f(x) = \mathcal{P}_k(x) + R_k(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

On utilise l'intégration par parties pour calculer :

$$\frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = (x-t)^k \\ v(t) = f^{(k+1)}(t) \end{array} \right|$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{r} u(t) = \frac{1}{k+1}(x-t)^{k+1}.(-1) \\ v'(t) = f^{(k+2)}(t) \end{array} \right|$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}(x-t)^{k+1}.f^{(k+1)}(t)\right]_c^x + \frac{1}{k!}\frac{1}{k+1}\int_c^x \mathrm{d}t(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t) \\ &= \frac{1}{(k+1)!}(x-c)^{k+1}.f^{(k+1)}(c) + \frac{1}{(k+1)!}\int_c^x \mathrm{d}t(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t) \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{1}{(k+1)!}(x-c)^{k+1}.f^{(k+1)}(c) \\ &\quad + \frac{1}{(k+1)!}\int_c^x \mathrm{d}t(x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t) \\ &= \mathcal{P}_{k+1}(x) + R_{k+1}(x) \end{aligned}$$

La formule est donc vraie à l'ordre $k+1$ ce qui termine la preuve.

3.3 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 3.2 *(Formule de Taylor-Lagrange)*

Soient I un intervalle ouvert, f une fonction n fois dérivable dans I, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{(n)!}h^n \qquad (10)$$

Preuve
Posons $x_0 + h = x$, et considérons la fonction F définie dans I par :

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f^{(1)}(t)}{1!}.(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}.(x-t)^{n-1}$$

Par un calcul facile nous obtenons :

$$F'(t) = -f^{(1)}(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}.(x-t) + \cdots + (n-1)(x-t)^{n-2}.\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}.(x-t)^{n-1} = -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}.(x-t)^{n-1}$$

Définissons G sur I par :

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^n .F(x_0)$$

Nous avons $G(x_0) = G(x) = 0$. Par application du théorème de Rolle, il existe c entre x et x_0 tel que :

$$0 = G'(c) = F'(c) + n.\frac{(x-c)^{n-1}}{(x-x_0)^n} F(x_0)$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(x_0) &= -\frac{1}{n}\frac{(x-x_0)^n}{(x-c)^{n-1}} F'(c) \\ &= \frac{1}{n}\frac{(x-x_0)^n}{(x-c)^{n-1}} \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}.(x-c)^{n-1} \\ &= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c) \end{aligned}$$

qui donne la formule attendue.

3.3.1 Exemples et remarques

- Si $x_0 = 0$, la formule de Taylor-Lagrange s'écrit :

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}.x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}.x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}x^n$$

  avec ξ dans l'intervalle $]0, x[$ ou $]x, 0[$ selon que x est positif ou négatif.

- En particulier pour $f(x) = \sin(x)$, pour $x_0 = 0$ et $n = 5$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(0) + \frac{\sin^{(1)}(0)}{1!}.x + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2!}.x^2 + \frac{\sin^{(3)}(0)}{3!}.x^3 + \frac{\sin^{(4)}(0))}{4!}.x^4 + \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cos\xi \end{aligned}$$

  avec ξ entre 0 et x.

- Si $f(x) = \cos(x)$, pour $x_0 = 0$ et $n = 5$, nous avons :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(0) + \frac{\cos^{(1)}(0)}{1!}.x + \frac{\cos^{(2)}(0)}{2!}.x^2 + \frac{\cos^{(3)}(0)}{3!}.x^3 + \frac{\cos^{(4)}(0))}{4!}.x^4 + \frac{\cos^{(5)}(\xi)}{5!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}\sin\xi \end{aligned}$$

  avec ξ entre 0 et x. On en déduit l'encadrement suivant :

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

3.3.2 Autre formulation de la formule de Taylor-Lagrange

Un simple changement de notations dans la formulation précédente de la formule de Taylor-Lagrange donne aussi le :

Théorème 3.3 *(Formule de Taylor-Lagrange, autre forme)*

Supposons que $f(x)$ et ses dérivées $f', f'', ..., f^{(n)}$ existent et soient continues dans un intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$ et supposons que $f^{(n+1)}$ existe dans un intervalle ouvert $a < x < b$. Alors, $\forall c \in [a, b]$, on peut écrire :

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + R_n(x)$$

où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \xi \in [c, x]$ tel que le reste peut-être mis sous la forme suivante :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1} \tag{11}$$

3.3.3 Formule de Cauchy du reste

On peut aussi dans le théorème précédent donner une autre forme au reste, la forme de Cauchy :

Théorème 3.4 *(Forme de Cauchy du reste) :*
Le reste peut-être mis sous la forme suivante :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.(x-c) \tag{12}$$

Preuve
Le théorème de la moyenne :

Théorème 3.5 *Pour toute fonction à valeurs réelles, définie et continue sur $[a,b]$, il existe un réel ξ compris entre a et b, a et b étant exclus, vérifiant :*

$$f(\xi) = \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

donne ici directement :

$$\tfrac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{n!}(x-c)(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)$$

3.4 La formule de Taylor-Young

Théorème 3.6 *(Formule de Taylor-Young)*

Soit I un intervalle ouvert contenant x_0, et soit f une fonction n fois dérivable dans I telle que $f^{(n)}$ soit continue en x_0 (cette hypothèse est vérifiée si $f^{(n+1)}(x_0)$ existe). Alors il existe une fonction ε, définie au voisinage de 0, telle que :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}h^n + h^n\varepsilon(h) \tag{13}$$

avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Preuve
Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n, nous avons :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \tfrac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.h + \tfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.h^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \tfrac{f^{(n)}(x_0+\theta_h h)}{(n)!}h^n$$

avec $\theta_h \in]0,1[$ (nous utilisons la notation θ_h pour bien indiquer que θ_h dépend de h.
Posons $\varepsilon(h) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0+\theta_h h) - f^{(n)}(x_0)\right)$. Nous avons :

$$\lim_{h\to 0}(x_0+\theta_h.h) = x_0 \text{ et } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

car $f^{(n)}$ est continue en x_0, ce qui prouve le théorème.

3.5 Séries de Taylor et de Mac Laurin

3.5.1 Introduction

Si toutes les dérivées de f existent, on peut explorer la forme sans reste :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n \tag{14}$$

La question est évidemment de voir si cette série converge, et si elle converge vers $f(x)$.
La série précédente porte le nom de **série de Taylor** (ou **de Mac Laurin** si $c=0$).

Même si toutes les dérivées existent, le développement en série proposé n'est pas forcément correct, car la série peut ne pas converger vers $f(x)$. La détermination des valeurs de fonctions peut toutefois se faire avec une bonne approximation par les polynômes de Taylor.

Exemple :
Calculons la valeur approchée de la fonction $\sin(x)$ en $x = 0,3$ en utilisant le polynôme de Taylor d'ordre 4.
Le développement de Mac Laurin à l'ordre 5 est :

$$\sin x \approx 0 + x - 0 - \tfrac{1}{3!}x^3 + 0 + \tfrac{1}{5!}x^5$$

Les polynômes de Taylor à l'ordre 3 et 4 valent :

$$\mathcal{P}_3(x) = \mathcal{P}_4(x) = x - \tfrac{x^3}{3!}$$

et le reste d'ordre 4 (sous la forme de lagrange) vaut :

$$R_4(x) = \tfrac{1}{5!} f^{(5)}(\xi) x^5 = \tfrac{1}{5!} \cos \xi x^5$$

On a donc :

$$\mathcal{P}_4(0,3) = 0,3 - \tfrac{1}{6}(0,3)^3 \approx 0,2945$$

La précision de cette aproximation peut être déterminée en examinant le reste :

$$|R_4| = \left| \tfrac{1}{5!} \cos \xi (0,3)^5 \right| \leqslant \tfrac{1}{120} \tfrac{243}{10^5} < 0,000021$$

L'approximation est donc correcte à 4 décimales.

3.5.2 Convergence des séries de Taylor et de Mac Laurin

Montrons que certaines fonctions sont représentées par leur série de Taylor en montrant que $R_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Par la formule de Taylor, comme :

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

si $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, alors :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

et $f(x)$ est égale à sa série de Taylor.

Remarque :
On a toujours $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d^n}{n!} = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}$. En effet, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et converge donc $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc, son terme général tend forcément vers zéro et on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d^n}{n!} = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}$.

Exemples :

- La fonction $\sin x$ est égale à sa série de Mac Laurin (ou de Taylor si $c \neq 0$).
  Si $f(x) = \sin x$, toutes les dérivées sont égales à $\pm \sin x$ ou $\pm \cos x$ et on a donc $|f^{(n)}(x) \leqslant 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right| \\ &\leqslant \left| \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \end{aligned}$$

  Par la remarque ci-dessus, $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$ et on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
  Donc $\sin x$ est égal à sa série de Mac Laurin et on a :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{15}$$

  Comme le rayon de convergence de cette série est infini, cette égalité est valable $\forall x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $\cos x$ est égale à sa série de Taylor.
  Pour le voir on peut utiliser le fait que l'on peut dériver terme à terme une série entière. On obtient en dérivant la série précédente :

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)!} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned} \tag{16}$$

  Comme le rayon de convergence de cette série est infini, cette égalité est valable $\forall x \in \mathbb{R}$.

- La fonction e^x est égale à sa série de Mac Laurin.
  En effet, la fonction e^x est sa propre dérivée, donc $f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1 \quad _foralln \in \mathbb{N}$, donc :

$$|R_n(x)| = e^{\xi} \left| \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \to 0 \quad \text{lorsque} n \to \infty$$

  par la remarque précédente et on a donc :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{17}$$

  Remarque : on savait déjà que la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ convergeait $\forall x \in \mathbb{R}$. Appelons $f(x)$ sa somme. En dérivant terme à terme, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) \end{aligned}$$

  où l'on a posé dans la dernière équation $n = k-1$. Comme on a de plus $f(0) = 1$, on conclut que $f(x) = e^x$ car e^x est par définition la seule fonction qui est sa propre dérivée et qui vaut 1 en $x = 0$.

- **La série binomiale**.
  Considérons la série suivante :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \quad \forall r \neq 0$$

Cette série converge pour $|x < 1|$; en effet, par le test du rapport (critère de d'Alembert), on a :

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \left|\frac{r(r-1)\dots(r-n-1+1)}{(n+1)!} \frac{n!}{r(r-1)\dots(r-n+1)} \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \frac{1}{n+1} |r-n| \, |x|$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |r-n| \, |x| = |x|$. Si $|x| < 1$, la série converge donc. Essayons de déterminer vers quelle somme. Posons $y(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$. Comme cette série converge $\forall x$ tel que $|x| < 1$, on peut dériver terme à terme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} n x^{n-1}$$

Multiplions par $(1 + x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1+x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} n x^{n-1}(1+x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} n x^{n} \\
&= r + \sum_{n=2}^{\infty} \binom{r}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} n x^{n} \\
&= r + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k+1} (k+1) x^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k} k x^{k}
\end{aligned} \tag{18}$$

où l'on a posé $k = n - 1$ dans la première série et $k = n$ dans la seconde.

Les deux séries ont pour somme la série suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} r \binom{r}{k} x^k$$

car :

$$\begin{aligned}
\binom{r}{k+1}(k+1) + \binom{r}{k} k &= \frac{r!(k+1)}{(k+1)!(r-k-1)!} + \frac{r!k}{k!(r-k)!} \\
&= \frac{r!}{k!(r-k-1)!} + \frac{r!k}{k!(r-k-1)!(r-k)} \\
&= \frac{r!(r-k) + r!k}{k!(r-k-1)!(r-k)} \\
&= \frac{rr!}{k!(r-k-1)!(r-k)} \\
&= r\binom{r}{k}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$(1+x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = r + r\sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k} x^k = ry$$

On peut trouver la fonction $y(x)$, solution de cette équation différentielle en utilisant la méthode de séparation des variables :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{r}{1+x} \mathrm{d}x$$

ou encore :

$$\ln y = r\ln(1+x) + K$$

c'est-à-dire :

$$y = k(1+x)^r$$

Comme $y(0) = 1$, on déduit directement $k = 1$. Finalement, on a donc prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.7 *(Série binomiale)*

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)...(r-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \quad \forall r \neq 0 \quad \forall x \text{ tel que } |x| < 1 \tag{19}$$

Remarque :

La série binomiale :

- se réduit à une somme finie si p est un entier positif ou nul ;
- converge absolument pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$ si $p > 0$ et $p \notin \mathbb{Z}$;
- converge pour $-1 < x < 1$ si $-1 < p < 0$;
- converge pour $-1 < x < 1$ si $p \leqslant -1$

La série binomiale converge donc certainement $\forall p$ sur $-1 < x < 1$.

3.5.3 Quelques importants développements en séries de puissances

$$
\begin{aligned}
(1+x)^a &= 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x<1\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x<1\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1\leqslant x<1\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x\leqslant 1\\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1<x<1\\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+ \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\cdots\\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots+\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots,\\
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\mathrm{th}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots \quad \text{convergente pour } -\infty<x<\infty\\
\mathrm{Arcsin}(x) &= x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+\cdots \quad \text{converge pour } -1\leqslant x\leqslant 1\\
\mathrm{Arccos}(x) &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+\cdots \text{converge pour } -1\leqslant x\leqslant 1\\
\mathrm{Argsh}(x) &= x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+\cdots\\
\mathrm{Arctan}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \quad \text{convergente pour } -1\leqslant x\leqslant 1\\
\mathrm{Argth}(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots
\end{aligned}
$$

Remarque : les coefficients B_n qui apparaissent dans le développement limité de la fonction tangente sont les nombres de Bernoulli)

Exercice 6

- Calculer la série de Taylor de $y=\frac{1}{x}$ autour de 1 ; quel est son intervalle de convergence ?
- Développer $y=\frac{1}{10+x}$ en puissances de x ; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?
- Développer $y=\cos x$ en puissances de $(x-\frac{\pi}{4})$; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?
- Développer $y=e^{-x}$ en série de Mac Laurin ; estimer $y(1)$ avec les polynômes de Taylor $\mathcal{P}_0(x),\mathcal{P}_1(x),\mathcal{P}_2(x),\mathcal{P}_3(x),\mathcal{P}_4$ et comparer à la valeur donnée par la machine ; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?
- Développer $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ en série de puissances de $(x-1)$; quel est l'intervalle de convergence de cette série ?

- Trouver le développement autour de 0 de $\cos x^2$, xe^{-2x}, $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

3.6 Séries entières de variables complexes

On s'intéresse ici à des séries de puissances du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.z^n$ où $z = x + jy$ est une variable complexe et les a_n peuvent aussi être des complexes. Ces séries se traitent comme les séries réelles. En particulier, elles convergent pour $|z| < R$ c'est-à-dire à l'intérieur d'un disque limité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ où R est le rayon de convergence de la série (qui peut être nul ou infini). Sur la frontière du disque, c'est-à-dire pour $|z| = R$, la série peut converger ou non, selon z. Pour $y = 0$, le disque de convergence se réduit à l'intervalle de convergence des séries de puissances réelles.

Exemple : étudions la convergence de la série complexe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n^3 3^{n-1}}$.

Comme :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^n}{(n+1)^3 3^n}\frac{n^3 3^{n-1}}{z^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3}\frac{1}{3}|z| = \frac{1}{3}|z|$$

la série converge pour $|z| < 3$ et diverge pour $|z| > 3$. Pour $|z| = 3$, la série des valeurs absolues est : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n^3 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ qui converge comme p-série avec $p = 3$, donc la série converge absolument et donc simplement pour $|z| = 3$.

3.6.1 Application : l'exponentielle complexe

Définition

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$. En effet $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|}{n!}$ converge puisque :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et donc converge simplement.

Définisssons alors la somme de cette série comme étant une nouvelle fonction complexe de variable complexe, et notons la $\exp(z)$.

Propriétés

- On a bien sûr $\exp(0) = 1$.

- Calculons la dérivée de cette fonction :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{z^{(n-1)}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}z^m = \exp(z)$$

  où l'on a posé $m = n - 1$.Cette fonction est donc sa propre dérivée.

- $\forall a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$\exp(a).\exp(b) = \exp(a + b) \tag{20}$$

  En effet, on a :

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{n!}\Big|_{z=1} \quad \text{et} \quad \exp(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n z^n}{n!}\Big|_{z=1}$$

Le produit de deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ donne une série $\sum c_n z^n$ avec :

$$\begin{aligned}
c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \\
&= \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1}b}{(n-1)!.1} + \cdots + \frac{ab^{n-1}}{1.(n-1)!} + \frac{b^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \frac{1}{n!}(a+b)^n
\end{aligned}$$

La série $\sum c_n.z^n$ a donc pour somme $\exp((a+b)z)$ et sa valeur en 1 est $\exp(a+b)$.On notera donc pour plus de commodité et comme on le fait dans $\mathbb{R}$ la fonction $\exp(z) = e^z$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
e^{jx} &= \cos x + j \sin x \qquad (21) \\
e^{-jx} &= \cos x - j \sin x \qquad (22)
\end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
e^{\pm jx} &= 1 \pm jx - \frac{x^2}{2!} \mp j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \pm j\left(x - \frac{x^3}{3! + \cdots}(\right) \\
&= \cos x \pm j \sin x
\end{aligned}$$

Ce sont les **formules d'Euler**, très utiles notamment pour retrouver rapidement les formules de trigonométrie circulaire.

Exercice 7
Prouver les formules d'addition suivantes en utilisant les propriétés de l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$