X

Chapitre 1 : calcul intégral, rappels et applications géométriques

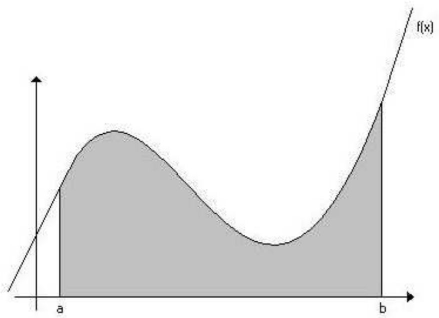
1 Intégrale définie : intégrale de Riemann

1.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, $a < b$ sont des réels. L'idée intuitive d'intégrale d'une fonction est celle "d'aire sous sa courbe" (au moins pour une fonction positive). Nous allons ici donner une façon de construire théoriquement l'intégrale à partir de cette idée (il existe d'autres constructions comme notamment celle de Lebesgue).
En fait, si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et si $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère, alors on va définir l'intégrale de f sur l'intervalle $[a;b]$, notée :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

par l'aire $\mathcal{A}$ de la surface (grisée sur le dessin) délimitée par :



$$\begin{cases} x = a : \text{droite verticale} \\ x = b : \text{droite verticale} \\ y = 0 : \text{axe des abscisses} \\ \mathcal{C}_f \equiv y = f(x) : \text{graphe de la fonction } f \end{cases}$$

Plus précisément :

Si f est une fonction réelle positive continue prenant ses valeurs dans un segment $I = [a, b]$, alors l'intégrale de f sur I, notée :

$$\int_{x\in I} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

est l'aire d'une surface délimitée par la représentation graphique de f et par les trois droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$, surface notée S_f, soit :

$$S_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \in I \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \tag{3}$$

On donne un signe positif à l'aire des surfaces comme S_f situées au-dessus de l'axe des abscisses.

Pour pouvoir traiter aussi les fonctions négatives, on donne un signe négatif aux portions situées sous cet axe.

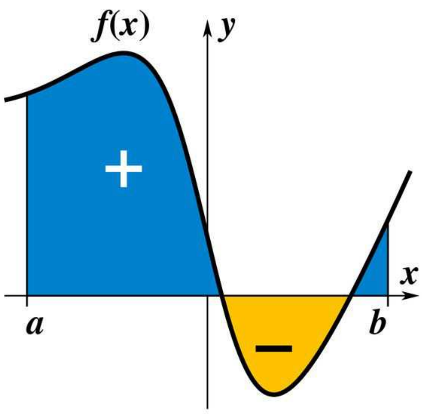
Ainsi, pour définir l'intégrale d'une fonction continue dans le cas général (positive ou négative), il suffit de définir f^+ et f^- comme suit :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

puis de définir l'intégrale de f à partir de f^+ et f^-, fonctions continues et positives :

$$\int_{x\in I} f\,\mathrm{d}x = \int_{x\in I} f^+\,\mathrm{d}x - \int_{x\in I} f^-\,\mathrm{d}x \tag{4}$$



Plus précisément, définir l'aire de cette surface consiste, dans la définition de la théorie de Riemann, à approcher f par une suite de fonctions g_n dont on connait l'intégrale (en général : des rectangles qu'on définit d'aire égale à $\pm$ longueur $\times$ largeur) et telle que la différence entre f et g_n tende vers 0 quand n tend vers l'infini.

Il se trouve qu'avec cette méthode, il est possible de définir l'aire d'une fonction continue présentant un ensemble dénombrable de points de discontinuité.

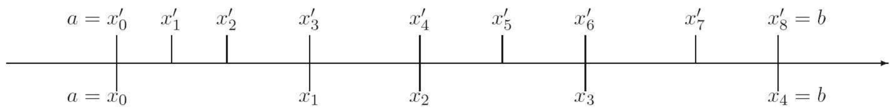
On appelle f un intégrande, et on note $\int$ (un s allongé, mis pour somme) l'opérateur mathématique, appelé intégrateur, qui est associé à l'intégration.

1.2 Fonction intégrable au sens de Riemann

1.2.1 Subdivisions

On appelle **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$, un ensemble fini de points $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ tels que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Les x_i (avec $i \in \{0, \cdots, n\}$) sont alors appelés **points de la subdivision** et les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ (avec $i \in \{1, \cdots, n\}$) sont appelés **intervalles de la subdivision**.Le **pas de la subdivision**, sera le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ lorsque i est compris entre 1 et n.

Une subdivision $\mathcal{X}'$ est dite plus fine que $\mathcal{X}$, si l'ensemble $\mathcal{X}'$ contient $\mathcal{X}$ (plus fine = plus de points). Le pas de la subdivision $\mathcal{X}'$ est donc plus petit que celui de $\mathcal{X}$. Obtenir une subdivision plus fine que $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ revient à subdiviser les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.
Exemple :



1.2.2 Définition : fonction en escalier

Une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est dite **en escalier** (ou encore **étagée**) si, et seulement si, il existe une subdivision de $[a; b]$ adaptée à f , c'est-à-dire un ensemble de points (subdivision) de $[a; b]$ tel que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \in \mathbb{N}) \ ;$$

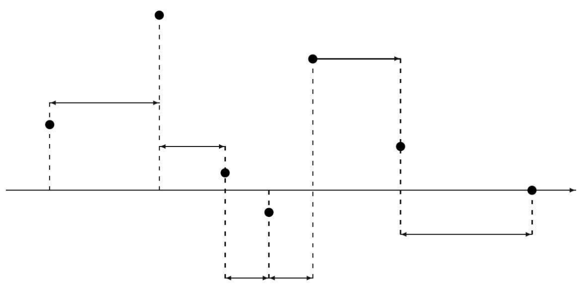
et un ensemble de nombres $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ tels que, pour k variant de 1 à n, la fonction soit constante sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ et y prenne la valeur λ_k, c'est-à-dire :

$$\forall k \in [1; n] \cap \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in]x_{k-1}; x_k[\qquad f(x) = \lambda_k \ .$$

Remarque : aux points x_k la fonction peut prendre d'autres valeurs éventuellement.

On dira que la subdivision $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ est adaptée à la fonction en escalier f si f est constante sur chacun des intervalles $]x_{k-1}, x_k[$. Toute subdivision plus fine que $\mathcal{X}$ est encore adaptée à f.

Notation : on notera $\mathcal{E}([a; b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$.

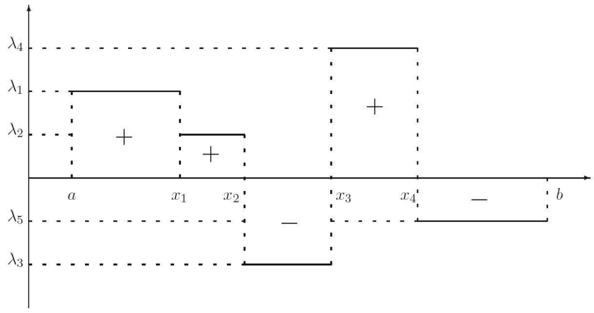


1.2.3 Définition : intégrale d'une fonction en escalier

Soit f une fonction en escalier définie sur $[a, b]$. Si $\mathcal{X} = \{x_0, \cdots x_n\}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, et si, pour k compris entre 1 et n, on appelle $\lambda_k = f(a_{k-1})$ la valeur prise par la fonction f en un point quelconque a_{k-1} de l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$, on peut considérer la somme :

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, (x_k - x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \, (x_{i+1} - x_i)$$

Remarquons que le nombre $\mid \lambda_k \mid \ (x_k - x_{k-1})$ est l'aire géométrique du rectangle de hauteur $\mid \lambda_k \mid$ et de base $x_k - x_{k-1}$. Le nombre σ représente donc l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de f qui est formé d'une réunion finie de rectangles. Les aires des rectangles situés en dessous de l'axe des x sont comptées négativement.



Cette somme ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie. Prendre une subdivision plus fine revient à décomposer les rectangles précédents en rectangles plus petits, et la somme reste inchangée. Cette somme ne dépend que de f, et sera notée :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

et on l'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$.

En résumé, on a donc la définition suivante :

Soit $f \in \mathcal{E}([a;b])$. L'intégrale de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre réel :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,(x_k - x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

où $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\} \qquad a_i \in]x_i, x_{i+1}[$.

Exemple : pour la fonction partie entière, on a en choisissant la subdivision $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$:

$$\int_0^4 E(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{4}(x_k - x_{k-1})E(x_{k-1}) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6\,.$$

1.2.4 Définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée

Toutes les fonctions envisagées désormais sont des fonctions à valeurs réelles définies sur un segment $[a, b]$ et bornées sur cet intervalle. Pour une fonction bornée, il existe donc un nombre M, tel que, pour tout x de $[a, b]$, on ait :

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Notons :

$$\mathcal{E}^+ \quad = \quad \{\varphi \in \mathcal{E}([a;b]) \mid \varphi \geqslant f\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^+(f) = \left\{ I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \mid \varphi \in \mathcal{E}^+ \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{I}^+(f)$ n'est pas vide car il contient :

$$\int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a). \tag{5}$$

D'autre part, si φ est une fonction en escalier telle que $\varphi \geqslant f$, on a aussi $\varphi \geqslant -M$, et donc :

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant -M(b-a).$$

L'ensemble $\mathcal{I}^+(f)$ est donc minoré et non vide. Il possède par conséquent dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ une borne inférieure (par la propriété de la borne inférieure que possède $\mathbb{R}$).
On note $I^+(f)$ cette borne inférieure, qui est appelée **intégrale supérieure** de f.
De même, si l'on pose :

$$\mathcal{E}^- \quad = \quad \{\psi \in \mathcal{E}([a;b]) \mid \psi \leqslant f\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^-(f) = \left\{ I(\psi) = \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x \mid \psi \in \mathcal{E}^- \right\} \tag{6}$$

le même raisonnement montre que cet ensemble n'est pas vide et est majoré (par $M(b-a)$). Sa borne supérieure existe donc (car $\mathbb{R}$ vérifie cette propriété de la borne supérieure). On note $I^-(f)$ cette borne supérieure, qui est appelée **intégrale inférieure** de f. Donc :

$$I^+(f) \quad = \quad \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a;b]) \\ \varphi \geqslant f}} I(\varphi) \tag{7}$$

$$I^-(f) \quad = \quad \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a;b]) \\ \psi \leqslant f}} I(\psi) \tag{8}$$

La fonction f est dite **intégrable au sens de Riemann** si, et seulement si :

$$I^+(f) = I^-(f)$$

De plus, le nombre réel $I = I^+(f) = I^-(f)$ est alors appelé **l'intégrale de Riemann** de la fonction f sur $[a;b]$ et est noté :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

En particulier, d'après ce qui précède, une fonction en escalier est Riemann-intégrable.
Remarque : la variable d'intégration est "muette" : cela signifie que :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u\,.$$

1.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

1.3.1 Définition : fonction continue par morceaux

Une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux si, et seulement si, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ $(n \in \mathbb{N})$ de $[a;b]$ telle que :

- f soit continue sur chaque intervalle $]a_{i-1};a_i[\,\forall i \in [1;n] \cap \mathbb{N}$;
- $\lim\limits_{x \to a_{i-1}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a_i^-} f(x)$ existent et sont finies

Une telle subdivision est alors dite adaptée à f.

Notation : on notera $\mathcal{CM}([a;b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$.

Exemples : les fonctions continues et les fonctions en escalier sont des fonctions continues par morceaux.
Remarques :

- les valeurs prises par une fonctions continue par morceaux aux points de subdivision n'importent pas.
- si une subdivision $\mathcal{X}$ est adaptée à une fonction continue par morceaux alors toute subdivision plus fine que $\mathcal{X}$ l'est aussi.

1.3.2 Propriétés des fonctions continues par morceaux

Théorème 1.1 *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Si f et g sont continues par morceaux alors $\lambda.f, f+g, f.g$ et $|f|$ le sont aussi.

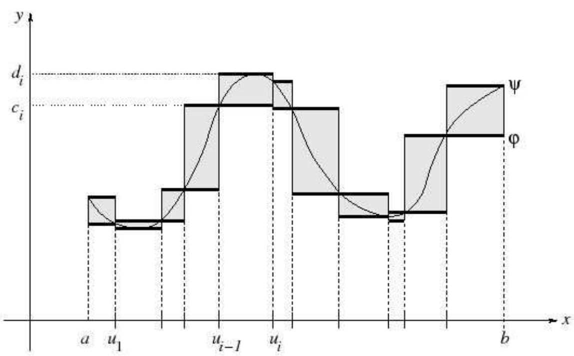
Théorème 1.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ avec $\alpha < \beta$.*
Si f est continue par morceaux alors $f_{/[\alpha,\beta]}$ l'est aussi.

Théorème 1.3 *Toute fonction continue par morceaux de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ est bornée.*

1.3.3 Approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier

Théorème 1.4 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b])$ une fonction continue par morceaux. Il existe deux fonctions en escalier ψ et φ qui encadrent d'aussi près que l'on veut la fonction f, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \psi, \varphi \in \mathcal{E}([a;b]) \mid \varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$$



Preuve
On fait la preuve d'abord pour f continue.
Comme f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a;b]$, elle y est uniformément continue d'après le Théorème de Heine. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x, y \in [a;b], |x-y| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $(b-a)/n \leqslant \delta_\varepsilon$ et soit $\{a_0; a_2; \ldots; a_n\}$ une subdivision de $[a;b]$ à pas constant $(b-a)/n$, donc telle que $\forall i \in [0;n] \cap \mathbb{N}$, $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ donc $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n} \leqslant \delta_\varepsilon$.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, la fonction f est continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$ et y admet donc un minimum et un maximum en des points $\alpha, \beta \in [a_{i-1}, a_i]$. Posons $m_i = f(\alpha)$ et $M_i = f(\beta)$. Comme $|\ \beta - \alpha\ | \leqslant |\ a_i - a_{i-1}\ | \leqslant \delta_\varepsilon$ on a $|\ f(\beta) - f(\alpha)\ | \leqslant \varepsilon$ et on en déduit que $0 \leqslant M_i - m_i \leqslant \varepsilon$.
Définissons maintenant des fonctions φ et ψ qui vont être solutions de notre problème.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose φ constante égale à m_i et ψ constante égale à M_i sur $]a_{i-1}, a_i[$.
Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\varphi(a_i) = \psi(a_i) = f(a_i)$.
Les fonctions φ et ψ sont bien définies sur $[a,b]$ et ce sont évidemment des fonctions en escalier.
En résumé, les fonctions $\psi, \varphi \in \mathcal{E}([a;b])$ sont donc définies par :

$$\forall x \in]a_{i-1}, a_i[\qquad \varphi(x) = m_i = \min_{x \in [a_{i-1}; a_i]} f(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi(a_i) = f(a_i);$$
$$\forall x \in]a_{i-1}, a_i[\qquad \psi(x) = M_i = \max_{x \in [a_{i-1}; a_i]} f(x) \qquad \text{et} \qquad \psi(a_i) = f(a_i).$$

L'encadrement $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ est vérifié sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ et aussi en les a_i.
Enfin, l'encadrement $0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$ est vérifié pour les mêmes raisons.
Il reste à généraliser le résultat aux fonctions continues par morceaux.
Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, $\mathcal{X} = \{a_0, a_1 \cdots, a_n\}$ une subdivision adaptée à f et $\varepsilon > 0$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons f_i la restriction de f à l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$. On peut prolonger f_i par continuité en a_i et en a_{i-1} en posant $f_i(a_i) = \lim_{a_i^-} f$ et $f_i(a_{i-1}) = \lim_{a_{i-1}^+} f$.
En appliquant le résultat précédent aux fonctions f_i continues sur les segments $[a_{i-1}, a_i]$, il existe des fonctions en escaliers φ_i et ψ_i définies sur $[a_{i-1}, ai]$ vérifiant $\forall x \in [a_{i-1}, a_i]$, $\varphi_i(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_i(x)$ et $0 \leqslant \psi_i(x) - \varphi_i(x) \leqslant \varepsilon$.
On peut alors définir deux fonctions en escalier φ et ψ qui vont résoudre notre problème.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ et $\psi(x) = \psi_i(x)$ sur $]a_{i-1}, a_i[$.
Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\varphi(a_i) = \psi(a_i) = f(a_i)$.
Les fonctions φ et ψ sont bien définies sur $[a,b]$ et ce sont évidemment des fonctions en escalier.
Par construction, l'encadrement $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ est vérifié sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ mais aussi en les a_i. Enfin, l'encadrement $0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$ est aussi vérifié pour les mêmes raisons.

Théorème 1.5 *Toute fonction continue par morceaux est Riemann-intégrable.*

Preuve
Introduisons l'ensemble $\Phi = \{\varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) | \varphi \leqslant f\}$ des fonctions en escalier inférieures à f et celui $\Psi = \{\psi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) | f \leqslant \psi\}$ des fonctions en escalier supérieures à f. D'après la définition de l'intégrale de Riemann, il faut montrer que les bornes $\alpha = \sup \left\{I_{[a,b]}(\varphi) | \varphi \in \Phi\right\}$ et $\beta = \inf \left\{I_{[a,b]}(\psi) | \psi \in \Psi\right\}$ existent et sont égales.
Notons $I^- = \left\{I_{[a,b]}(\varphi) | \varphi \in \Phi\right\}$ et $I^+ = \left\{I_{[a,b]}(\psi) | \psi \in \Psi\right\}$ les ensembles formés des intégrales des éléments de Φ et Ψ.
Comme la fonction f est continue par morceaux, elle est bornée et donc il existe $m, M \in \mathbb{R}$ vérifiant $m \leqslant f \leqslant M$. On en déduit que l'ensemble Φ est non vide car $\varphi = m$ est élément de Φ et par suite l'ensemble I^- est non vide. De même, avec $\psi = M$, on obtient $\Psi \neq \emptyset$ puis $I^+ \neq \emptyset$.
De plus, pour tout $\varphi \in \Phi$, on a $\varphi \leqslant f \leqslant M$ donc $I_{[a,b]}(\varphi) \leqslant I_{[a,b]}(M) = M(b-a)$. Ainsi l'ensemble I^- est majorée par $M(b-a)$.
Finalement I^- est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée donc $\alpha = \sup I^-$ existe.
De même $\beta = \inf I^+$ existe car I^+ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par $m(b-a)$.
Il reste à montrer $\alpha = \beta$.
Pour tout $\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi$, on a $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ donc $\varphi \leqslant \psi$ puis $I_{[a,b]}(\varphi) \leqslant I_{[a,b]}(\psi)$.
Par suite $I_{[a,b]}(\varphi)$ est un minorant de I^+ et donc $I_{[a,b]}(\varphi) \leqslant \beta$. Ainsi β est un majorant de I^- et donc $\alpha \leqslant \beta$.
D'autre part, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.
Puisque $\phi \in \Phi$ et $\psi \in \Psi$ on a $I_{[a,b]}(\varphi) \leqslant \alpha$ et $\beta \leqslant I_{[a,b]}(\psi)$.
De plus $\psi \leqslant \varphi + \varepsilon$ donc $I_{[a,b]}(\psi) \leqslant I_{[a,b]}(\varphi) + I_{[a,b]}(\varepsilon)$.
On en déduit $\beta \leqslant \alpha + \varepsilon(b-a)$.
Cette relation valant pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\beta \leqslant \alpha$, et finalement $\beta = \alpha$.

1.3.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Propriété : linéarité de l'intégrale

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a;b])$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,; \tag{10}$$
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,. \tag{11}$$

Preuve

- Cas $\lambda > 0$
  Pour toute fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier inférieure à f, on a $\lambda.\varphi \leqslant \lambda.f$. Par définition de l'intégrale de la fonction $\lambda\varphi$, on a $I_{[a,b]}(\lambda\varphi) \leqslant \int_a^b \lambda f$ et donc $I_{[a,b]}(\varphi) \leqslant \int_a^b \lambda f$.
  En passant cette inégalité en la borne supérieure en $\phi \in \Phi$, on obtient :
  $$\lambda \int_a^b f \leqslant \int_a^b \lambda f$$
  De même, en partant d'une fonction en escalier ψ supérieure à f, on parvient à $\int_a^b \lambda f \leqslant \lambda \int_a^b f$ et on peut conclure :
  $$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

- Cas $\lambda < 0$
  Même principe mais la multiplication par un scalaire négatif renverse les inégalités.

- Étude de la somme :
  Soient φ_1 et $\varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions en escalier respectivement inférieures à f et g.
  La fonction $\varphi_1 + \varphi_2$ est alors inférieure à $f+g$ et par définition de l'intégrale de la fonction $f+g$, on a :

$$I_{[a,b]}(\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \int_a^b f + g$$

  puis :

$$I_{[a,b]}(\varphi_1 + \varphi_2) = I_{[a,b]}(\varphi_1) + I_{[a,b]}(\varphi_2)$$

  En passant cette inégalité en la borne supérieure en φ_1 et φ_2 fonctions en escalier inférieure à f et g, on obtient :

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leqslant \int_a^b f + g$$

  De même, en partant de fonctions en escalier supérieure à f et g, on obtient :

$$\int_a^b f + g \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g$$

  et on peut conclure à l'égalité.

Croissance de l'intégrale
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux ; on a :

- Si $f \leqslant 0$ alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
- Si $f \leqslant g$ alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Preuve
Si f est positive alors la fonction nulle est une fonction en escalier inférieure à f donc $\int_a^b f \geqslant I_{[a,b]}(0) = 0$.
Si $f \leqslant g$ alors $g - f \geqslant 0$ donc $\int_a^b (g-f) \geqslant 0$ puis par linéarité $\int_a^b g \geqslant \int_a^b f \geqslant 0$.

Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b])$. $\forall c \in [a;b]$ on a :

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Preuve
Si f est en escalier sur $[a;b]$ et si $(a_0; a_1; \cdots; a_p = c; \cdots; a_n)$ est une subdivision de $[a;b]$ adaptée à f , alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i) \\
\int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=p}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i) \,.
\end{aligned}$$

Le résultat est alors évident.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b])$. On a :

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \,; \tag{12}$$

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \,. \tag{13}$$

Propriété : intégrale et valeur absolue ou inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b])$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \tag{14}$$

Preuve

- On peut utiliser la croissance de l'intégrale :
  $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ donc par croissance $-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$

- Une autre démonstration peut se faire en considérant les parties positive et négative de la fontion f : $f^+ = \frac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. On a alors $f = f^+ - f^-$, et f^+ et f^- sont des fonctions positives, donc d'intégrales positives. Donc, en utilisant les propriétés de la valeur absolue de la somme :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

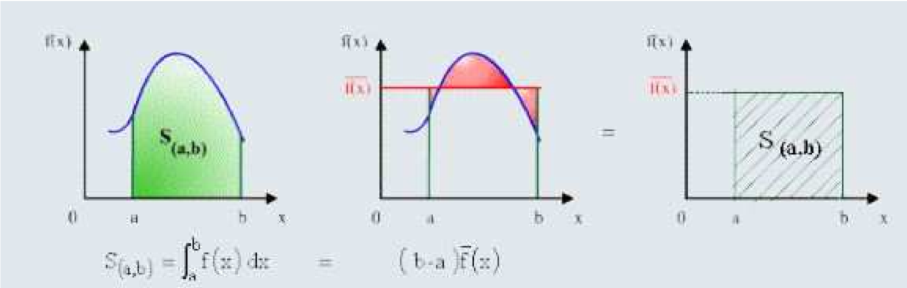
1.4 Intégrale et moyenne

Définition : valeur moyenne d'une fonction

Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b])$. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$ est le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{15}$$

Interprétation graphique : μ est la valeur de la fonction constante qui aurait sur $[a;b]$ la même intégrale que f.



Exercice 1

- Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \to 9x^2 + 15$ entre $x = 2$ et $x = 5$.
- Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \to \cos(x) + \sin(x)$ entre $x = 0$ et $x = 2\pi$.

Inégalité de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{CM}([a;b])$.

Si $\exists m, M \in \mathbb{R} | \forall x \in [a;b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m \leqslant \mu \leqslant M,$$

c'est-à-dire encore :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \tag{16}$$

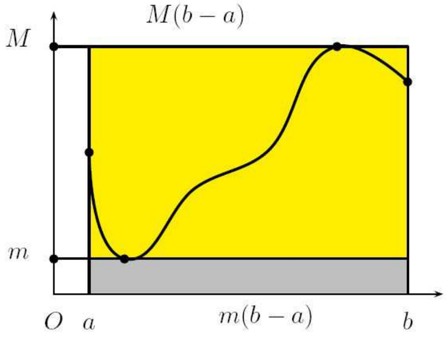
Preuve

Comme pour tout x de $[a,b]$, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, on a, d'après la propriété de croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$



Exercice 2

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x.e^x$.
  Appliquez l'inégalité de la moyenne à la fonction $t \to e^t$ *sur l'intervalle* $[0, x]$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$.
  Appliquez l'inégalité de la moyenne à la fonction $t \to \frac{1}{1+t}$ *sur l'intervalle* $[0, x]$

Théorème 1.6 *Théorème de la moyenne*
Pour toute fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, il existe un réel c compris entre a et b (a et b étant exclus) vérifiant :

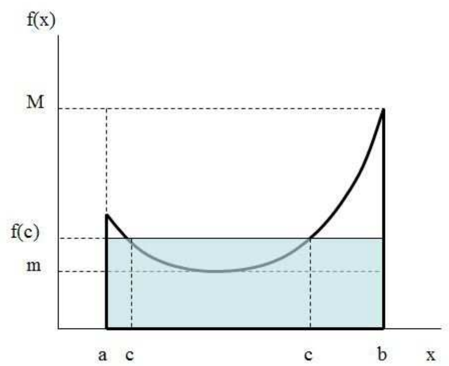
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{17}$$

Preuve
Par l'inégalité de la moyenne, on a :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Or, f étant continue sur $[a; b]$, elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M au moins une fois (théorème des valeurs intermédiaires).
Donc $\exists c \in]a; b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$



2 Théorème Fondamental de l'Analyse : lien intégrale-primitives

2.1 Rappel : notion de primitive d'une fonction

2.1.1 Définition

Le calcul de primitive est l'opération inverse du calcul de dérivée.

Definition *(Primitive d'une fonction)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **primitive de** f **sur** I toute application $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que :

$$F'(x) = f(x)\, \forall x \in I \tag{18}$$

Exemple : la fonction $f : x \mapsto x^5 - 3x^2 + 7\pi$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F_1 : x \mapsto \frac{x^6}{6} - x^3 + 7\pi x$. Pour trouver ce résultat, on lit le tableau des dérivées "en sens inverse" ou on utilise le tableau de primitives ci-dessous.

Remarquons que $F_2 : x \mapsto \frac{x^6}{6} - x^3 + 7\pi x + 3$ est aussi une primitive de f . Il suffit de calculer la dérivée de F_2 pour s'en convaincre.

2.1.2 Primitives usuelles

Soient a, b, c des constantes et k un entier relatif :

Tableau des primitives simples

$f(x)$	D_D	$F(x)$
0	$\mathbb{R}$	C
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{ax^2}{2}+bx+C$
x^n ($\forall n \in \mathbb{R}-\{-1\}$)	$\mathbb{R}^*$ si $n \geq 0$; $\mathbb{R}^*_+$ sinon	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*_+$	$\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*_+$	$\ln x + C$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$	$\sqrt{x}+C$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}+C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$	$\tan x + C$
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}-\{k\pi\}$	$\operatorname{cotan} x + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\ln x$	$\mathbb{R}^*_+$	$x\ln x - x + C$

2.1.3 Existence d'une primitive

Théorème 2.1 *Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.*

Ce théorème découlera directement du théorème fondamental de l'analyse.
Remarque : la condition de continuité est une condition suffisante mais ce n'est en aucun cas une condition nécessaire. En effet, considérons la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0. En effet, considérons la suite $u_n = \frac{1}{n\pi}$; cette suite tend vers 0. La suite :

$$f(u_n) = f(\tfrac{1}{n\pi}) = \tfrac{2}{n\pi}\sin n\pi - \cos n\pi = (-1)^{n+1}$$

ne converge pas vers $f(0) = 0$.
Cependant la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction :

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

F est bien dérivable en 0 (calculer le taux d'accroissement fini).

2.1.4 Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème 2.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f sur I. L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $G : I \to \mathbb{R} : x \to G(x) = F(x) + k, k \in \mathbb{R}$.*

En clair, si F est une primitive de f sur I, G est une autre primitive de f sur I si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + k$

Preuve
$\Rightarrow$ Il est clair que si $G(x) = F(x) + k$ alors G est dérivable sur I car F l'est et $G'(x) = F'(x) = f(x)$ d'où $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$ donc G est bien une autre primitive de f sur I.
$\Leftarrow$ Réciproquement, si G est une autre primitive de f sur I, alors $(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$ donc la fonction $G - F$ est constante sur I, i.e. $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $(G-F)(x) = k$ soit $G(x) = F(x) + k$.

Théorème 2.3 *Si F est une primitive de f sur I et si $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.*

Preuve
D'après le théorème précédent on sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + k \quad \forall x \in I$. Ainsi $G(x_0) = F(x_0) + k = y_0 \Rightarrow k = y_0 - F(x_0)$ et comme y_0 et $F(x_0)$ sont déterminés de manière unique alors k est unique aussi, d'où le résultat.

On a les propriétés suivantes en utilisant les propriétés de la dérivation :

2.1.5 Propriétés des primitives

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et F et G leurs primitives respectives sur I. Soit encore $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- λF est une primitive de λf.

2.2 Théorème fondamental de l'Analyse

Voici maintenant le lien entre l'intégration et les primitives :

Théorème Fondamental de l'Analyse (Leibniz-Newton)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b](\forall a, b \in \mathbb{R})$.

- La fonction :
$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \tag{19}$$
est dérivable sur I et sa dérivée est égale à f. La fonction F est donc une primitive de f.
- De plus, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
- Si $\mathcal{F}$ est une primitive quelconque de f, alors la fonction $\mathcal{F} - F$ est constante.
- On en déduit que pour toute primitive $\mathcal{F}$ de f :
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [\mathcal{F}(x)]_a^b = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) \tag{20}$$

Remarques :

- Dans la première partie du Théorème, la variable x est la "borne d'en haut" de l'intégrale : c'est pour cela qu'on parle parfois de "l'intégrale fonction de la borne d'en haut".
- Dans la deuxième partie du Théorème, la primitive F choisie est quelconque et ce n'est pas nécessairement celle donnée dans la première partie.
- C'est ce Théorème qui permet de montrer que toute fonction continue admet des primitives.

Preuve

- Il est clair que F s'annule en a :
$$F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0\,.$$
Il faut montrer maintenant que F est bien une primitive de f, c'est-à-dire que $F' = f$ ou encore (par définition de la dérivée) que :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\, \forall x_0 \in \mathbb{R}\,.$$
On a :
$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right)$$
donc :
$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right)$$
(où on a décomposé la première intégrale grâce à la Relation de Chasles) et finalement :
$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\,,$$
c'est-à-dire la valeur moyenne μ de f entre x_0 et x (ou x et x_0, selon leur ordre).
Mais f est continue sur $[a; b]$ et l'inégalité de la moyenne montre que :
$$\min_{t \in [x_0, x]} f(t) \leqslant \mu \leqslant \max_{t \in [x_0, x]} f(t)\,,$$
donc le Théorème des Valeurs Intermédiaires assure qu'il existe $c_{x_0} \in [x_0; x]$ tel que :
$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \mu = f(c_{x_0})\,.$$
Comme c_{x_0} est compris entre x_0 et x (ou x et x_0), le Théorème des Gendarmes assure que :
$$\lim_{x \to x_0} c_{x_0} = x_0$$
et (par continuité de f) que :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c_{x_0}) = f(x_0)$$
C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

- La dérivée de $(\mathcal{F} - F)(x)$ valant zéro $\forall x \in I$, cette fonction est constante sur I.
- Soit $\mathcal{F}$ une primitive quelconque de f :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) = F(b) - F(a)$$

puisque $F(a) = 0$.
Toute autre primitive $\mathcal{F}$ de f diffère de F par une constante $k \in \mathbb{R}$, donc $\mathcal{F}(x) = F(x) + k \, \forall x \in [a;b]$ et :

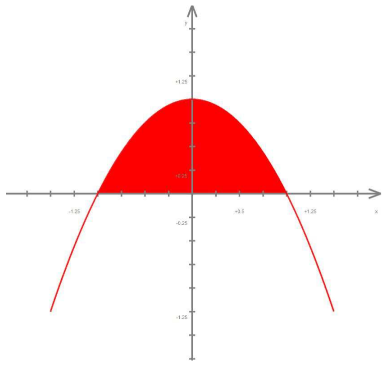
$$\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,,$$

ce qui est le résultat annoncé.

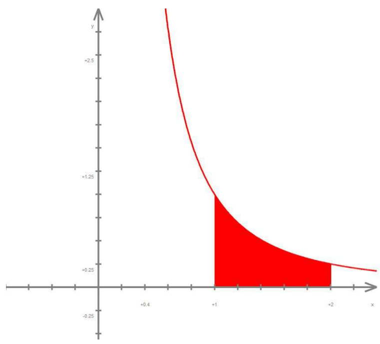
Exemples :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} \\ \int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}\end{aligned}$$

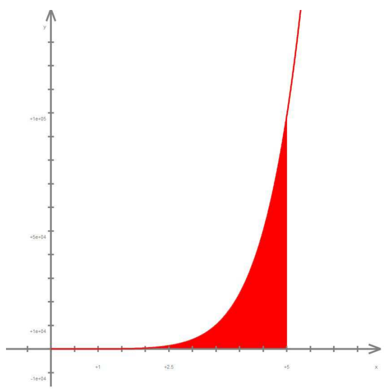
$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{-1}^1 (1-x^2)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \\ &= 2 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$



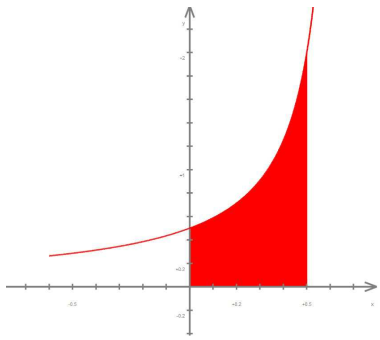
$$\begin{aligned}I_2 &= \int_1^2 \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=2} \\ &= -\frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}I_3 &= \int_1^5 x(2+x^2)^3\ \mathrm{d}x \\ &= \int_1^5 x(x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_1^5 x^7 + 6x^5 + 12x^3 + 8x\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^8}{8} + 6\frac{x^6}{6} + 12\frac{x^4}{4} + 8\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=5} \\ &= \left[\frac{x^8}{8} + x^6 + 3x^4 + 4x^2\right]_{x=1}^{x=5} \\ &= \left(\frac{5^8}{8} + 5^6 + 3.5^4 + 4.5^2\right) - \left(\frac{1}{8} + 1 + 3 + 4\right) \\ &= 66420\end{aligned}$$



$$I_4 = \int_0^{0,5} \frac{1}{2-3x}\ \mathrm{d}x$$



On reconnaît une fraction rationnelle constituée :

- au numérateur d'un polynôme de degré 0
- au dénominateur d'un polynôme de degré 1

Cette fraction peut se bricoler pour arriver à une expression de la forme $\frac{u'}{u}$, qui s'intégrera avec la fonction ln.

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{0,5} \frac{1}{2-3x}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{0,5} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{-3}{2-3x}\ \mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right) [\ln(2-3x)]_{x=0}^{x=0,5} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right) (\ln(0,5) - \ln(2)) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right) (-\ln(2) - \ln(2)) \\ &= \frac{2\ln(2)}{3} \end{aligned}$$

2.3 Notion d'intégrale indéfinie (sans bornes)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives. On note :

$$\int f(x)\mathrm{d}x\,, \tag{21}$$

l'ensemble de toutes les primitives de f sur l'intervalle I.
Donc, si F est une primitive de f sur I :

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{x \mapsto F(x) + k | k \in \mathbb{R}\}\,. \tag{22}$$

Par abus de langage, cette notation désigne aussi une primitive quelconque de f : il faut toutefois bien garder à l'esprit qu'il existe une infinité de primitives définies à une constante additive près.
Exemple :

$$\int 2x\ \mathrm{d}x = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Cette écriture signifie que les primitives de la fonction $x \mapsto 2x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2$ à une constante additive réelle C près.

Exercice 3

- On cherche une primitive sur $]-5;+\infty[$ de la fonction $f(x) = \frac{3}{(x+5)^2}$
  - Rappeler la formule donnant la dérivée d'une fonction de la forme $\frac{1}{u^n}$
  - A titre d'exemple, dériver la fonction $G(x) = \frac{1}{x+5}$
  - Écrire $f(x)$ en faisant apparaître la dérivée de G
  - En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$
  - Vérification : $F'(x) = \cdots$

- De même sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ avec $f(x)=\frac{5}{(3x-2)^3}$ en faisant apparaître la dérivée de $G(x)=\frac{1}{(3x-2)^{\cdots}}$
- De même sur $]1;+\infty[$ avec $f(x)=\frac{x^2}{(5x^3-4)^4}$ en faisant apparaître la dérivée de $G(x)=\cdots$

Exercice 4

- Soit $f: x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. On demande de trouver la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(2)=3$.
- Soit $f: x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$. On demande de trouver la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(-2)=5$.
- Soit $f: x \mapsto (2x-3)^3$ définie sur $\mathbb{R}$. On demande de trouver la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(2)=-4$.
- Soit $f: x \mapsto \frac{x}{(x^2-1)^2}$ définie sur $]1;+\infty[$. On demande de trouver la primitive F de f sur $]1;+\infty[$ telle que $F(2)=-4$.

3 Techniques de calcul intégral

3.1 Primitives et intégrales élémentaires

3.1.1 Primitives de fonctions simples

Dans le tableau suivant, la première colonne est la fonction dont on cherche les primitives, la deuxième est son domaine de définition et la troisième, les primitives de cette fonction sur un intervalle inclus dans ce domaine. C, a, ω, φ désignent des constantes réelles, avec $\omega \neq 0$.

Tableau des primitives simples

$f(x)$	D_D	$F(x)$
a	$\mathbb{R}$	$ax + C$
$x^a, \forall\, a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\mathbb{R}^*$ si $a \in \mathbb{Z}$; $\mathbb{R}_+^*$ sinon	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + C$
$\sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan x + C$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\text{cotan } x + C$
$\tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan x - x + C$
$a^x\ (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x(\ln(x) - 1) + C$
$\tan x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\sin x . \cos x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{2}.\cos^2 x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\ ,\ 1[$	$\arcsin x + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\ ,\ 1[$	$\arccos x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x + C$
$\text{ch } x$	$\mathbb{R}$	$\text{sh } x + C$
$\text{sh } x$	$\mathbb{R}$	$\text{ch } x + C$
$\frac{1}{\text{ch}^2\ x}$	$\mathbb{R}$	$\text{th } x + C$
$\frac{1}{\text{sh}^2\ x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\text{coth } x + C$
$\text{th}^2\ x$	$\mathbb{R}$	$x - \text{th } x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\text{argsh } x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1\ ,\ +\infty[$	$\text{argch } x + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1\ ,\ 1[$	$\text{argth } x + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$]1\ ,\ +\infty[$	$\text{argcoth } x + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$]-\infty,\ \ -1[$	$\text{argcoth } x + C$

3.1.2 Primitives de fonctions composées

Tableau des primitives composées

$f(x)$	$F(x)$
$\lambda u'$	$\lambda\ u + C$
$u' + v'$	$u + v + C$
$(v' \circ u).(u')$	$(v \circ u) + C$
$(u^a).(u'), \forall\, a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{u^{a+1}}{a+1} + C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$
$\sin u . u'$	$-\cos\ u + C$
$e^u . u'$	$e^u + C$

3.1.3 Exercices de primitives et d'intégrales élémentaires

Exercice 5 Calculer les primitives et intégrales suivantes :

- $\int x^5 \, \mathrm{d}x$
- $\int (x+\sqrt{x}) \, \mathrm{d}x$
- $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}) \, \mathrm{d}x$
- $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$
- $\int (\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2) \, \mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \, \mathrm{d}x$
- $\int (x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) \, \mathrm{d}x$
- $\int (x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 \, \mathrm{d}x$
- $\int_{-5}^{4} (3x-1) \, \mathrm{d}x$
- $\int_1^3 \frac{3}{x^3} \, \mathrm{d}x$
- $\int_0^{\pi} (2\sin x + 3\cos x) \, \mathrm{d}x$
- $\int_1^e (\frac{1}{x} - 2x) \, \mathrm{d}x$
- $\int_4^9 \frac{x-2}{x\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$
- $\int_{-2}^{2} (2^x - 2e^x) \, \mathrm{d}x$

Exercice 6 Écrire sans calcul les primitives suivantes.

- $\displaystyle\int_c^x \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \sin(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$;
- $\displaystyle\int_c^x \frac{1}{2+\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{\sin(t)}{2+\cos(t)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{2\sqrt{t}+|t|}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{\arcsin^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$;
- $\displaystyle\int_c^x \frac{\sin(t)}{2+\cos(t)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{\tan(t)}{\cos(t)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{\sin(t)\tan(t)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\mathrm{d}t$;
- $\displaystyle\int_c^x \tan^3(t)+\tan^5(t)\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x 1+\tan^6(t)\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{\cos^2(t)(3+\tan(t))}\mathrm{d}t$;
- $\displaystyle\int_c^x \frac{2t+3}{(t^2+3t+5)^2}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{t+1}{t^2+2t+5}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}\mathrm{d}t$;
- $\displaystyle\int_c^x \mathrm{e}^{\sqrt{\sin(t)}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{\tan(\sqrt{t})+\tan^3(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t+ \quad ; \quad \int_c^x \frac{\sin(e^{-t})e^{-t+\sqrt{\cos(\mathrm{e}^{-t})}}}{\sqrt{\cos(\mathrm{e}^{-t})}}\mathrm{d}t$;
- $\displaystyle\int_c^x \frac{\mathrm{e}^{2t}(\sin(\mathrm{e}^{2t})-\sin^3(\mathrm{e}^{2t}))}{\left(1+\sqrt{1+\cos^3(\mathrm{e}^{2t})}\right)\sqrt{1+\cos^3(\mathrm{e}^{2t})}}\mathrm{d}t$.

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos t \, \mathrm{d}t$
- $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \, \mathrm{d}t$
- $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (t^3+2t^2+4t+1) \, \mathrm{d}t$
- $I_4 = \displaystyle\int_{-3}^{3} (12t^{17}+2t^3-t) \, \mathrm{d}t$
- $I_5 = \displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 3} (1-2e^t) \, \mathrm{d}t$
- $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \, \mathrm{d}t$

Exercice 8 Déterminer deux primitives sur $]0,+\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{3}{x^2} + \frac{1}{3}x^2$$
$$g : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}$$

Exercice 9

1. Déterminer deux primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^3+2x^2+1}{x^2}$.
2. Déterminer deux primitives sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 5(4x-1)^6$ et deux primitives sur $]1;+\infty[$ de $g : x \mapsto \dfrac{7}{(3x+2)^5}$.
3. Déterminer une primitive sur $]-1;+\infty[$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+5}}$, et une primitive sur $]2;+\infty[$ de $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$.

Exercice 10

- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$. Calculer la dérivée de g sur $]0,+\infty[$.
- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Déduire de la première question une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

.

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $]-3,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ et F la primitive de f sur $]-3,+\infty[$ qui s'annule en zéro.

- Étudier les variations de la fonction F sur $]-3;+\infty[$.
- Étudier le signe de $F(x)$ sur $[-3;+\infty[$.
- Soit g la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par $g(x) = F(x) - x$.
  - Démontrer que g est décroissante sur $]-3;+\infty[$.
  - En déduire que : si $x > 0$, alors $F(x) < x$.

Exercice 12 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

Exercice 13 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int \cos t \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$\int \tan t\,\mathrm{d}t$$
$$\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 14 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$
$$\int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{it+1}$$
$$\int \mathrm{e}^t \cos t\,\mathrm{d}t$$
$$\int t \sin t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 17 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t$$
$$\int_1^2 \ln t \,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 18 Pour $m, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

3.2 Primitives et intégration par changement de variable

3.2.1 Intégration par changement de variable : méthode

Soit f une fonction numérique continue, et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire dérivable et dont la dérivée est continue) sur un intervalle $[a, b]$ et dont l'image est contenue dans le domaine de définition de f. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\ \mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\ \mathrm{d}x. \tag{23}$$

Preuve
La fonction f étant continue, on considère une primitive F de f sur D l'ensemble de définition de f. La fonction $F \circ \varphi$ est alors dérivable, comme composée de deux fonctions dérivables et on a :

$$(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b ((f \circ \varphi) \times \varphi')(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [F \circ \varphi]_a^b \\
&= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a en quelque sorte posé :

$$\left\{ \begin{array}{r} u = \varphi(x) \\ \mathrm{d}u = \varphi'(x)\mathrm{d}x \end{array} \right. \tag{24}$$

La borne inférieure $x = a$ dans l'intégrale où la variable est x devient $u = \varphi(x = a) = \varphi(a)$ dans l'intégrale où la variable est u et de même pour la borne supérieure b qui devient $\varphi(b)$.

La formule peut s'appliquer dans les deux sens (*cf.* exemples 2 et 3 ci-dessous).

Exemples

1. Soit à calculer
$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x$$
On pose le changement de variable $u = x^2$ et donc $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ avec x variant entre $\sqrt{\pi}$ et $2\sqrt{\pi}$. Par conséquent u varie entre π et 4π.
$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{4\pi} \cos(u)\mathrm{d}u = [\sin(u)]_{\pi}^{4\pi} = \sin(4\pi) - \sin\pi = 0 - 0 = 0.$$

2. Soit à calculer :
$$I = \int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$
Posons :
$$\left\{\begin{array}{c} u = \varphi(x) = x^2 \\ \mathrm{d}u = \varphi'(x)\mathrm{d}x = 2x\mathrm{d}x \end{array}\right. . \tag{25}$$
Si $a = 1/3$, $u = \varphi(1/3) = 1/9$ et si $a = 1/2$, $u = \varphi(1/2) = 1/4$ donc l'intégrale devient :
$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2}\int_{1/9}^{1/4} (1-u)^{1/2}\mathrm{d}u &= -\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left[(1-u)^{3/2}\right]_{1/9}^{1/4} \\ &= -\frac{1}{3}\left\{(1-\frac{1}{4})^{3/2} - (1-\frac{1}{9})^{3/2}\right\} \\ &= -\frac{1}{3}\left\{(\frac{3}{4})^{3/2} - (\frac{8}{9})^{3/2}\right\} \\ &= \cdots \\ &= \frac{16}{81}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

3. Soit à calculer :
$$I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$
Posons :
$$\left\{\begin{array}{c} x = \sin t = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t = \cos t\mathrm{d}t \end{array}\right. . \tag{26}$$
Si $x = 1/2$, $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$. Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, donc :
$$\begin{aligned} I = \int_{\varphi(\pi/6)}^{\varphi(\pi/3)} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1-(\varphi(t))^2}\varphi'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos t\sqrt{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos t \mid \cos t \mid \mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 t\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= (\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}) + \frac{1}{4}(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

3.2.2 Recherche de primitive par changement de variables

Cette méthode est basée sur la formule de dérivation des fonctions composées :

$$(G \circ h)' = G' \circ h.h'.$$

Donc on a :

$$\int (G' \circ h)(x).h'(x)\mathrm{d}x = (G \circ h)(x). \tag{27}$$

Deux cas peuvent se produire :

- la fonction f à intégrer, s'écrit sous la forme $g \circ h.h'$. Dans ce cas on effectue le changement de variable $t = h(x)$, on calcule une primitive G de la fonction g, alors, la fonction $G \circ h$ est une primitive de f.
- on veut faire un changement de variable du type $x = k(t)$, pour ramener le calcul des primitives de f à celui des primitives de $f \circ k.k'$.
  Il faut alors faire attention au domaine de définition de k, et le choisir de telle sorte que k soit bijective, de manière à pouvoir écrire $t = k^{-1}(x)$, ce qui permettra de revenir en x à la fin du calcul. Si G est une primitive de $f \circ k.k'$, on aura alors
  $$F = G \circ k^{-1} \tag{28}$$

On a donc la proposition suivante :

Soit f définie sur J ; on suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection de $I \to J$; alors :

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

(on a donc posé $x = \varphi(t)$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$, $t = \varphi^{-1}(x)$),
en ce sens que, si G est une primitive sur J de la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ et si F est une primitive de f, on a :

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in I & F(x) & = & G(t) + C \\ & & = & G(\varphi^{-1}(x)) + C \end{array}$$

Preuve
Lorsqu'on dérive par rapport à x l'expression :

$$H(x) = G(\varphi^{-1}(x))$$

on obtient :

$$\begin{aligned} H'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x)).(\varphi^{-1})'(x) \qquad \text{(par la règle de dérivation d'une fonction composée)} \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x)).(\varphi^{-1})'(x) \\ &\quad \text{(car G est une primitive de la fonction } : t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t) \text{ ici calculée en } t = \varphi^{-1}(x)) \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \qquad \text{(par la règle de la dérivée de la fonction réciproque)} \\ &= f(x) \end{aligned} \tag{29}$$

donc H est bien une primitive de f sur J

3.2.3 Exercices

Exercice 19 Déterminer les primitives suivantes en procédant par un changement de variable adéquat

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$$
$$\int \frac{\ln t \,\mathrm{d}t}{t + t(\ln t)^2}$$
$$\int \frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + 1}.$$

Exercice 20 Déterminer :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2 - 1}}$$

Exercice 21 Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t + t(\ln t)^2}$$
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t + 1}}$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + 1}$$

Exercice 22 Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

$$\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^1 t^2\sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23
a) Observer

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 24
a) Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

b) En déduire

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2} + t}$$

Exercice 25 Calculer les intégrales suivantes :

- $\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$
- $\int \frac{\ln^3 x}{x}\mathrm{d}x$
- $\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$
- $\int \sin 3x\mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x$
- $\int (x+2)^3\mathrm{d}x$
- $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$
- $\int \sin x \cos^3 x\mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$
- $\int e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$
- $\int t^2\sin(t^3+1)\mathrm{d}t$
- $\int \frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$
- $\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$
- $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\mathrm{d}x$
- $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^3}\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{4x^2+9}\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$
- $\int_{-1}^0 xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x$
- $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\pi/9} \tan 3x\ln(\cos 3x)\mathrm{d}x$

3.2.4 Nouvelles primitives "élémentaires"

Soit à calculer les primitives du type :

$$I_{\pm} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Un changement de variable judicieux permet de calculer ces primitives.

- Calcul de I_+
  Posons :

$$\left\{\begin{array}{r} x = \mid a \mid \sinh u \\ \mathrm{d}x = \mid a \mid \cosh u \mathrm{d}u \end{array}\right.$$

  On obtient :

$$\begin{aligned} I_+ = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\mid a \mid \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}} \\ &= \frac{\mid a \mid}{\mid a \mid} \int \frac{\cosh u \mathrm{d}u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}} = \int \frac{\cosh u}{\cosh u} \mathrm{d}u \\ &= u + C = \mathrm{Argsh} \frac{x}{\mid a \mid} + C \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C \end{aligned} \tag{30}$$

- Calcul de I_-
  De la même manière, posons :

$$\left\{\begin{array}{r} x = \mid a \mid \cosh u \\ \mathrm{d}x = \mid a \mid \sinh u \mathrm{d}u \end{array}\right.$$

  On obtient :

$$\begin{aligned} I_- = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\mid a \mid \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}} \\ &= \frac{\mid a \mid}{\mid a \mid} \int \frac{\sinh u \mathrm{d}u}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}} = \int \frac{\sinh u}{\mid \sinh u \mid} \mathrm{d}u \\ &= \int \frac{u}{\mid u \mid} \mathrm{d}u = \mid u \mid + C = \left| \mathrm{Argch} \frac{x}{\mid a \mid} \right| + C \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2-a^2} \right| + C \end{aligned} \tag{31}$$

3.3 Primitives et intégration par parties

3.3.1 Théorème d'intégration par parties

L'intégration par parties est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul.
La formule-type est la suivante, où u et v sont deux fonctions dérivables, de dérivées continues et a et b deux réels de leur intervalle de définition :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \tag{32}$$

ou encore, en remarquant que $u'(x)dx$ et $v'(x)dx$ sont respectivement les différentielles de u et de v :

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u. \tag{33}$$

En notant $w = v'$ et $W = v$, l'énoncé ci-dessus correspond au suivant.

Théorème 3.1 Théorème d'intégration par parties
Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, w une fonction continue définie sur I et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur I. Soit W une primitive de w sur I. Alors :

$$\int_a^b u(x)w(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)W(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)W(x)\ \mathrm{d}x. \tag{34}$$

On peut étendre ce théorème aux fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment d'intégration (mais la continuité est indispensable).

Preuve
La démonstration du théorème découle directement de la règle du produit :

$$(u \cdot W)' = u' \cdot W + u \cdot w.$$

On a donc

$$u \cdot w = (u \cdot W)' - u' \cdot W$$

puis :

$$\int_a^b u(x)w(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b (u \cdot W)'(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)W(x)\ \mathrm{d}x,$$

ce qui donne bien la propriété énoncée ci-dessus.

Dans un calcul de primitives, on a aussi :

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)] - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x \qquad (35)}$$

Exemples :

1. effectuons le calcul de : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ grâce à une intégration par parties.
   Pour cela, posons $u(x) = x$, de telle sorte que $u' = 1$, et $v' = cos$, de telle sorte que $v = sin$, par exemple (i.e. à une constante additive près, qui de toutes façons disparaîtrait au cours des calculs intermédiaires).
   Il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x && (36)\\
&= [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\,\mathrm{d}x && (37)\\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} && (38)\\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\,. && (39)
\end{aligned}$$

2. effectuons le calcul de $\int_a^b xe^x\ \mathrm{d}x$.
   Pour l'intégration par parties, posons $u(x) = x$ et $dv = e^x dx$. Nous avons donc $du = dx$ et (par exemple) $v = e^x$.
   Utilisons la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b xe^x\ \mathrm{d}x = [xe^x]_a^b - \int_a^b e^x\ \mathrm{d}x = [xe^x - e^x]_a^b\,.$$

   On en déduit qu'une primitive (sur $\mathbb{R}$) de la fonction $x \to xe^x$ est la fonction $x \to (x-1)e^x$.

3. recherchons une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ln :
   Posons :

$$\left\{\begin{array}{c} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{array}\right|$$

   On a donc :

$$\left\{\begin{array}{c} u'(x) = 1/x \\ v(x) = x \end{array}\right|$$

   et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\int \ln x\mathrm{d}x &= x\ln x - \int \frac{1}{x}x\mathrm{d}x\\
&= x\ln x - x + C
\end{aligned}$$

4. recherchons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\sin x$:
   Posons :

$$\left\{\begin{array}{c} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x \end{array}\right|$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{c} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x \end{array} \right|$$

et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int x \sin x \mathrm{d}x &= -x\cos x + \int \cos x \mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

L'intégration par parties 35 peut être utilisée pour un calcul direct de $\int u(x).v'(x)\mathrm{d}x$, en l'employant au besoin plusieurs fois de suite.
Exemple :

$$\int P(x)e^{x}\mathrm{d}x \tag{40}$$

où P est un polynôme.
On obtient par exemple :

$$\int x^n e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,\mathrm{d}x \ (n \in \mathbb{Z}/\left\{-1\right\})$$

ou encore, si P une fonction polynôme quelconque et qu'on note P' sa fonction dérivée :

$$\int P(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}P(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x$$

L'intégration par parties peut fournir une relation de récurrence permettant de calculer de proche en proche des intégrales dépendant d'un paramètre.
Exemple :

$$\int \cos^{2n} x\mathrm{d}x$$

Il se peut aussi qu'après plusieurs intégrations par parties on retombe sur l'intégrale de départ affectée d'un autre coefficient, ce qui permet de la calculer.
Exemple :

$$\int e^{x}\cos x\mathrm{d}x$$

3.3.2 Exercices

Exercice 26 Déterminer les primitives et calculer les intégrales suivantes :

- $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$
- $\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$
- $\int x(3x-2)^7\mathrm{d}x$
- $\int \ln^2 x\mathrm{d}x$
- $\int x\ln x\mathrm{d}x$
- $\int x^2 \sin 3x\mathrm{d}x$
- $\int e^x \sin x\mathrm{d}x$
- $\int \sin 2x \sin 3x\mathrm{d}x$
- $\int_1^2 x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$
- $\int_{-1}^1 (x+1)^2 e^{-2x}\mathrm{d}x$
- $\int_0^{\pi/2} x\sin x\mathrm{d}x$

Exercice 27 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int t\ln t\,\mathrm{d}t$$

$$\int t\arctan t\,\mathrm{d}t$$

$$\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 28 Déterminer les primitives suivantes :

$$\int (t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$\int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$\int (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 29 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$
$$\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t\,\mathrm{d}t \text{ (avec } n \in \mathbb{N})$$
$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 30 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^{1/2} \arcsin t\,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 31 Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \; n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x\mathrm{Arctan}\, x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

Exercice 32 Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \; n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x\mathrm{Arctan}\, x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

Exercice 33 Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 34 Intégrales de Wallis
Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Exercice 35 Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

Exercice 36 Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e \log(u)^n du.$$

Exercice 37 Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$
2. $\int x \arctan x \, dx$
3. $\int \ln x \, dx$ puis $\int (\ln x)^2 \, dx$
4. $\int \cos x \exp x \, dx$

Exercice 38 Voici quelques calculs de primitives utilisant l'intégration par parties.

$$\int_c^x t \sin t \, dt = \sin x - x \cos x + C \ .$$
$$\int_c^x \arcsin t \, dt = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C \ .$$
$$\int_c^x \arctan t \, dt = x \arctan x - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + C \ .$$
$$\int_c^x (t^2 + 1) \arctan t \, dt = -\frac{1}{6}x^2 + x \arctan x + \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\ln(x^2 + 1) + C \ .$$
$$\int_c^x t^n \ \ln t \, dt = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C \ .$$
$$\int_c^x (x^2 + 2x)e^{3x} \, dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{4}{27}\right) + C \ .$$

Exercice 39 Calculer les primitives suivantes, en utilisant l'intégration par parties.

- $\int_c^x t\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$; $\int_c^x t^2\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$; $\int_c^x t^3\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$;
- $\int_c^x t \ln(t)\mathrm{d}t$; $\int_c^x t^2 \ln(t)\mathrm{d}t$; $\int_c^x t^3 \ln(t)\mathrm{d}t$;
- $\int_c^x t \sin(t)\mathrm{d}t$; $\int_c^x t^2 \sin(t)\mathrm{d}t$; $\int_c^x t^3 \sin(t)\mathrm{d}t$;
- $\int_c^x t \cos(t)\mathrm{d}t$; $\int_c^x t^2 \cos(t)\mathrm{d}t$; $\int_c^x t^3 \cos(t)\mathrm{d}t$;
- $\int_c^x \arcsin(t)\mathrm{d}t$; $\int_c^x t \arcsin(t)\mathrm{d}t$; $\int_c^x \arctan(t)\mathrm{d}t$;
- $\int_c^x (t^2 + 1) \arctan(t)\mathrm{d}t$; $\int_c^x (t^2 + 2t)\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t$; $\int_c^x (t + 1) \arcsin(t)\mathrm{d}t$.

3.4 Primitives contenant un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$

3.4.1 Primitives du type $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$

Idée : transformer le dénominateur en somme ou différence de 2 carrés en mettant le trinôme sous sa forme canonique.
Canonisons le trinôme du second degré :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\ &= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 \pm k^2\right] \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} k^2 &= \mp\frac{\Delta}{4a^2} \\ &= -\frac{\Delta}{4a^2} \qquad \text{si} \qquad \Delta < 0 \\ &= \frac{\Delta}{4a^2} \qquad \text{si} \qquad \Delta > 0 \end{aligned}$$

La primitive se ramène donc à une des formes :

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 \pm k^2\right]}$$

qui se ramènent par changement de variable à des primitives élémentaires ; en effet, posons :

$$\begin{cases} t = x + \frac{b}{2a} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{cases}$$

on obtient :

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 \pm k^2}$$

qui est une primitive élémentaire.

- Le signe $+$ donne directement :
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+k^2} = \int \frac{\mathrm{d}(t/k)}{(t/k)^2+1} = \arctan\frac{t}{k} + C$$
- Le signe $-$ demande une séparation en éléments simples :
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-k^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+k)(t-k)} = A\int\frac{\mathrm{d}t}{t+k} + B\int\frac{\mathrm{d}t}{t-k}$$
avec A et B deux coefficients constants tels que $A(t-k) + B(t+k) = 1$, donc :
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ k(B-A) = 1 \end{cases}$$
donc $A = -B = -\frac{1}{2k}$. On obtient donc finalement :
$$\begin{aligned} \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+k^2} &= -\frac{1}{2k}\ln\mid t+k\mid + \frac{1}{2k}\ln\mid t-k\mid + C \\ &= \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right| + c \end{aligned} \tag{41}$$

Exemple : établir :

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+x-1} = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{-x+1/2}\right| + C$$

3.4.2 Primitives du type $I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$

Idée : faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur
On peut écrire :

$$Ax + B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{Ab}{2a}$$

Donc :

$$I_2 = \frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

Le second terme est une primitive de type I_1 et le premier terme peut se calculer par un changement de variable ; en effet, posons :

$$\begin{cases} t = ax^2+bx+c \\ \mathrm{d}t = (2ax+b)\mathrm{d}x \end{cases}$$

donc on obtient :

$$I_2 = \frac{A}{2a}\ln\mid ax^2+bx+c\mid + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)I_1$$

Exemple :

$$\int\frac{2x+3}{3x^2+x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\mid 3x^2+x-1\mid + \frac{8}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{3x^2+x-1}$$

3.4.3 Primitives du type $I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Procéder comme pour les primitives de type I_1 pour se ramener aux primitives élémentaires :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{k^2 - t^2}}$$

3.4.4 Primitives du type $I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$

Procéder comme pour I_2 et se ramener à :

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_3 \end{aligned}$$

Exercice 40 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+1}$$
$$\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$$
$$\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{2x^2-x+1}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+2t+5}}$$

3.5 Fraction rationnelle

3.5.1 Définition

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes à une indéterminée x dont les fonctions polynômes associées sont à valeurs dans un ensemble K et n'ont pas de racine commune (sinon on simplifie). En pratique, cet ensemble est généralement $\mathbb{R}$ (ensemble des réels) ou $\mathbb{C}$ (ensemble des complexes). Si $P_n(x)$ et $Q_m(x)$ sont deux polynômes, de degrés n et m et si Q_m n'est pas le polynôme nul, la fraction $f = \frac{\mathrm{P_n}}{\mathrm{Q_m}}$ est définie pour tout x tel que $\mathrm{Q_M}(x) \neq 0$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{P_n}(x)}{\mathrm{Q_m}(x)} \tag{42}$$

Remarque : on peut toujours supposer Q_m unitaire, c'est-à-dire de coefficient du terme x^m égal à 1.

- Si $n < m$, la fraction est dite régulière
- Si $n > m$, la fraction est dite irrégulière

3.5.2 Décomposition en éléments simples

Soit P_n et Q_m deux polynômes, on veut décomposer la fraction rationnelle $F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

On s'intéressera, dans la suite, aux fonctions rationnelles (dites "irréductibles") simplifiées au maximum, c'est-à-dire dans lesquelles $P_n(x)$ et $Q_m(x)$ sont premiers entre eux et où Q_m est de degré supérieur ou égal à 1. On notera K un corps commutatif (en général $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).

Obtention d'une fraction régulière

La première étape consiste à réduire la fraction de telle sorte que le degré du numérateur soit inférieur à celui du dénominateur (c'est-à-dire à se ramener à une fraction régulière). On procède pour ce faire à une division euclidienne de $P_n(x)$ par $Q_m(x)$. On sait qu'il existe toujours un couple unique de polynômes $S_{n-m}(x)$ et $R_l(x)$ tels que :

$$P_n(x) = Q_m(x).S_{n-m}(x) + R_l(x)$$

ou encore :

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}$$

avec :

- $S_{n-m}(x) =$ quotient de la division, qui est un polynôme de degré $n-m$ appelé partie entière de la fraction
- $R_l(x) =$ reste de la division, qui est un polynôme de degré $l < m$
- $\frac{R_l(x)}{Q_m(x)}$ qui est la fraction rationnelle régulière associée à F

Exemple : décomposer $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
x^4 & & & & -3 & x^2 & +2x & +1 \\ \cline{6-8}
-x^4 & -2x^3 & -x^2 & & & x^2 & -2x & +3 \\ \cline{1-4}
 & 2x^3 & -x^2 & & -3 & & & \\
 & +2x^3 & +4x^2 & +2x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & 3x^2 & +2x & -3 & & & \\
 & & -3x^2 & -6x & -3 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -4x & -6 & & &
\end{array}$$

Éléments simples de première et deuxième espèces

La fraction rationnelle $F = \frac{P_n}{Q_m}$ peut donc s'écrire $F = S_{n-m} + \frac{R_l}{Q_m}$. Le polynôme S_{n-m} est appelé la partie entière de F et c'est sur $\frac{R_l}{Q_m}$ que l'on va procéder à une décomposition en éléments simples.

Les polynômes irréductibles à coefficients réels sont du premier ou du second degré. Traditionnellement, dans ce cas, les fractions rationnelles obtenues dans la décomposition sont appelées respectivement éléments simples de première espèce et éléments simples de seconde espèce.

On appelle :

- élément simple de première espèce une fraction rationnelle de la forme :

$$\frac{\alpha}{(x-a)^p} \text{ avec } a, \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } p \in \mathbb{N}^*$$

- élément simple de deuxième espèce une fraction rationnelle de la forme :

$$\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^q} \text{ avec } \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{N}^* \text{ et } b, c \in \mathbb{R} \text{ et tels que } b^2-4c<0$$

Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Théorème 3.2 *(Décomposition)*
Soit $F = \frac{P}{Q}$ *irréductible, alors si* Q *admet la factorisation :*

$$\begin{aligned} Q &= (x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}...(x-a_p)^{p_r}(x^2+b_1x+c_1)^{q_1}(x^2+b_2x+c_2)^{q_2}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{q_s} \\ &= \prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{p_i}\prod_{j=1}^{s}(x^2+b_jx+c_j)^{q_j} \end{aligned}$$

où les polynômes $x^2+b_jx+c_j$ *n'ont pas de racine réelle (* Δ *négatif, donc* $b_j^2-4c_j<0$*) alors* F *admet la décomposition unique en éléments simples suivante :*

$$\begin{aligned} F = \; & S + \tfrac{\alpha_1}{(x-a_1)} + \tfrac{\alpha_2}{(x-a_1)^2} + ... + \tfrac{\alpha_{p_1}}{(x-a_1)^{p_1}} \\ & + \cdots \\ & + \tfrac{\alpha_1}{(x-a_r)} + \tfrac{\alpha_2}{(x-a_r)^2} + ... + \tfrac{\alpha_{p_r}}{(x-a_r)^{p_r}} \\ & + \tfrac{\beta_1 x+\gamma_1}{(x^2+b_1x+c_1)} + \tfrac{\beta_2 x+\gamma_2}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + ... + \tfrac{\beta_{q_1} x+\gamma_{q_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{q_1}} \\ & + ... \\ & + \tfrac{\beta_s x+\gamma_s}{(x^2+b_sx+c_s)} + \tfrac{\beta_s x+\gamma_s}{(x^2+b_sx+c_s)^2} + ... + \tfrac{\beta_s x+\gamma_s}{(x^2+b_sx+c_s)^{q_s}} \end{aligned}$$

ou encore :

$$F = S + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k_i=1}^{p_i}\frac{\alpha_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k_j=1}^{q_j}\frac{\beta_{k_j}x+\gamma_{k_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}}$$

où les α_{k_i}, β_{k_j} *et* γ_{k_j} *sont des nombres réels et le polynôme* S *est la partie entière de* F.

Exemples :

- on peut trouver des coefficients a, b, c, d et e en sorte que :

$$\frac{3x^5+2}{(x-1)^3(x^2+1)} = c + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{dx+e}{x^2+1}$$

- on peut trouver des coefficients a, b, c, d, e, f et g tels que :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x^2+x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3} + \frac{dx+e}{x^2+x+1} + \frac{fx+g}{(x^2+x+1)^2}$$

La difficulté principale est donc à présent d'identifier ces coefficients ; il existe pour ce faire plusieurs méthodes, dont certaines sont illustrées dans les exemples suivants.
Exemples de détermination des coefficients de la décomposition en éléments simples :

1. Étude d'un exemple avec deux pôles simples : $F = \frac{1}{x^2-1}$
   $Q = (x-1)(x+1)$ donc cette fraction admet deux pôles "simples" (c'est-à-dire d'ordre 1) : 1 et -1.
   On en déduit que F peut s'écrire sous la forme :

$$F = \tfrac{1}{x^2-1} = \tfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \tfrac{a}{x-1} + \tfrac{b}{x+1}$$

   Il s'agit de déterminer a et b. Une méthode qui est toujours réalisable consiste à réduire au même dénominateur le membre de droite de la décomposition et à identifier les coefficients des numérateurs. Cette méthode n'est pas très efficace car elle demande la résolution d'un nombre d'équations correspondant au nombre de coefficients à déterminer. On peut réduire grandement le travail en éliminant, par une multiplication judicieuse, tous les coefficients sauf un. Ainsi dans notre exemple en multipliant par $(x-1)$, on obtient

$$(x-1)\tfrac{1}{(x+1)(x-1)} = \tfrac{1}{(x+1)} = a + (x-1)\tfrac{b}{(x+1)}$$

   En posant alors $x = 1$, il vient $a = 1/2$.
   Puis, en multipliant F par $(x+1)$ et en posant $x = -1$, il vient $b = -1/2$ puisque :

$$(x+1)\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x-1)} = b + (x+1)\frac{a}{(x-1)}$$

La fraction F se décompose alors en

$$F = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{(x-1)} - \frac{1/2}{(x+1)}$$

2. Exemple avec quatre pôles simples : $F = \frac{x+3}{x^4-5x^2+4}$
Par factorisation du polynôme bicarré et par utilisation des identités remarquables, on peut l'écrire

$$F = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$$

qui se décompose en

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x+2}$$

Pour trouver le coefficient a, il suffit de multiplier les deux membres par $x-1$ puis de remplacer x par 1 :

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-2)(x+2)} = a + \frac{b(x-1)}{x+1} + \frac{c(x-1)}{x-2} + \frac{d(x-1)}{x+2}\,\frac{1+3}{(1+1)(1-2)(1+2)} = a = -\frac{2}{3}$$

De même pour trouver b, il suffit de multiplier par $x+1$ et de remplacer x par -1 :

$$\frac{-1+3}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)} = b = \frac{1}{3}$$

Pour c, il suffit de multiplier par $x-2$ et de remplacer x par 2 :

$$\frac{2+3}{(2-1)(2+1)(2+2)} = c = \frac{5}{12}$$

et pour d, on multiplie par $x+2$ et on remplace x par -2 :

$$\frac{-2+3}{(-2-1)(-2+1)(-2-2)} = d = -\frac{1}{12}$$

Donc finalement :

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{-2/3}{x-1} + \frac{1/3}{x+1} + \frac{5/12}{x-2} + \frac{-1/12}{x+2}$$

3. Existence d'un facteur irréductible du second degré
Pour décomposer

$$\frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}$$

en éléments simples, observons d'abord que :

$$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4).$$

Le fait que x^2+2x+4 ne soit pas factorisable en utilisant des coefficients réels est visible car le discriminant, $2^2-4.(1).(4) = -4$, est négatif. Nous cherchons donc des scalaires a, b, c tels que :

$$\frac{10x^2+12x+20}{x^3-8} = \frac{10x^2+12x+20}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+2x+4}.$$

Les différentes étapes sont :

- En multipliant par $(x-2)$ il vient :

$$\frac{(x-2)(10x^2+12x+20)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = (x-2)\frac{a}{x-2} + (x-2)\frac{bx+c}{x^2+2x+4}$$

soit :

$$\frac{10x^2+12x+20}{x^2+2x+4} = a + (x-2)\frac{bx+c}{x^2+2x+4}$$

- En posant $x=2$:

$$\frac{10\cdot 2^2+12\cdot 2+20}{2^2+2\cdot 2+4} = a + (2-2)\frac{bx+c}{2^2+2\cdot 2+4}$$

soit : $7 = a$.

- En posant $x = 0$ et en utilisant que $a = 7$, il vient :

$$\frac{20}{-8} = \frac{7}{-2} + \frac{c}{4}$$

soit : $c = 4$.

- En posant $x = 1$ et en utilisant que $a = 7$ et $c = 4$:

$$\frac{10 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 20}{(1-2)(1^2 + 2 \cdot 1 + 4)} = \frac{7}{1-2} + \frac{b \cdot 1 + 4}{1^2 + 2 \cdot 1 + 4}$$

soit $b = 3$

La décomposition en éléments simples est donc finalement :

$$\frac{10x^2 + 12x + 20}{x^3 - 8} = \frac{7}{x-2} + \frac{3x+4}{x^2+2x+4}.$$

4. Répétition d'un facteur irréductible du second degré

$$F = \frac{25}{(x+2)(x^2+1)^2}$$

avec le facteur irréductible du second degré x^2+1 au dénominateur, la décomposition en fractions partielles sera de la forme :

$$F = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

La détermination de a se fait en multipliant par $x+2$ et en prenant $x = -2$. On obtient $a = 1$. On peut alors écrire :

$$\frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2} = F - \frac{a}{x+2} = \frac{25}{(x+2)(x^2+1)^2} - \frac{1}{x+2} = \cdots = \frac{-x^3 + 2x^2 - 6x + 12}{(x^2+1)^2}$$

En remplaçant, dans le numérateur, $-x^3+2x^2$ par $x^2(-x+2) = (x^2+1-1)(-x+2) = (x^2+1)(-x+2)+x-2$, cette fraction devient :

$$\frac{(x^2+1)(-x+2) - 5x + 10}{(x^2+1)^2} = \frac{-x+2}{x^2+1} + \frac{-5x+10}{(x^2+1)^2}$$

La décomposition finale est donc

$$\frac{25}{(x+2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{-x+2}{x^2+1} + \frac{-5x+10}{(x^2+1)^2}\ .$$

3.5.3 Primitives des éléments simples

L'intérêt de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples est que ceux-ci admettent des primitives simples.

- La partie polynomiale s'intègre directement.
- Pour les éléments simples de première espèce, on a les résultats :

$$\int \frac{\alpha}{x-a} \mathrm{d}x = \alpha \ln \mid x - a \mid + C$$
$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^k} \mathrm{d}x = \alpha \int (x-a)^{-k} \mathrm{d}x = \frac{\alpha}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C = \frac{\alpha}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C \quad \text{pour } k \geqslant 2 :$$

- Pour les éléments de deuxième espèce $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ on fait apparaître au numérateur la dérivée de x^2+px+q. On obtient :

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} \quad = \quad \frac{a}{2} \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \frac{1}{(x^2+px+q)^n}$$

La première partie s'intègre directement :

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln(x^2+px+q) \text{ si } n=1 \\ \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} \text{ si } n>1 \end{cases}$$

Pour intégrer le terme de degré 1 de la deuxième partie, on utilise la formule;

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}$$

où Δ désigne le discriminant p^2-4q du trinôme.
Pour les termes de degrés plus élevés, on commence par mettre le trinôme sous forme canonique :

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

et l'on effectue le changement de variable :

$$t = \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}$$

On se ramène ainsi à l'intégrale :

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$$

On peut trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et donc obtenir I_n en fonction de $I_1 = \arctan t$.
Pour obtenir cette relation de récurrence, effectuons une intégration par parties :

$$\begin{cases} u' = 1 \\ v = (t^2+1)^{-n} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} u = t \\ v' = \frac{-n}{(t^2+1)^{n+1}}.2t \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right] + 2n\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right] + 2n\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right] + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right) \end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$2nI_{n+1} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)I_n$$

c'est-à-dire encore :

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} \tag{43}$$

Exemples :

- $I_2 = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$
  On obtient directement :

$$I_2 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t + C$$

- $I_3 = \int \frac{1}{(t^2+1)^3}\mathrm{d}t$
  On obtient directement :

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{t}{2.2(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}I_2 = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t + C\right) \\ &= \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8}\arctan t + C \end{aligned}$$

Exercice 41 Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

- $\frac{x^5}{1+x^{12}}$
- $\frac{1}{x(x^2-1)}$
- $\frac{x+1}{x^2-x+1}$
- $\frac{1}{x^2-2x+2}$
- $\frac{x}{x^2+2x+2}$
- $\frac{1}{x(x^2+1)}$
- $\frac{1}{x^3+1}$
- $\frac{x}{x^3-1}$
- $\frac{x^4+1}{x^4-1}$
- $\frac{1}{x^4+x^2+1}$
- $\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$
- $\frac{1}{x^4+1}$

Exercice 42 Calculer les primitives suivantes :

- $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x$
- $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\mathrm{d}x$
- $\int \frac{x^3+x-1}{x^2+2}\mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$
- $\int \frac{x^5}{x^3-1}\mathrm{d}x$
- $\int \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}\mathrm{d}x$
- $\int \frac{12x^4+2x^3-8x^2-5x+16}{2(2x^3+x^2-2x-6)}\mathrm{d}x$ (*Remarquez que* $3/2$ *annule le dénominateur*)

Exercice 43 Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2+2t-1)^2}$.
7. $\dfrac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$.
8. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.
9. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
11. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.
14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$.
15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

Exercice 44 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$
$$\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 45 Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.
5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx$.
6. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.
8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.
9. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx$.
11. $\displaystyle\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.
Y a-t-il une limite quand $a \to +\infty$?
12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1}$.

Exercice 46 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x^4+1)^2} \quad ; \quad \int \frac{xdx}{x^4+x^2+1} \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-2x-2)^2}.$$

Exercice 47 Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

$$\frac{2x}{(1-x+x^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

$$\frac{1}{(1+x^3)^3}$$

Exercice 48 Effectuez les calculs de primitives ci-dessous

$\frac{1}{x^3-1}$	$\frac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$
$\frac{1}{(x^3-1)^2}$	$-\frac{2}{9}\ln\lvert x-1\rvert + \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{x}{3(x^3-1)}$
$\frac{1}{x^3(1+x^3)}$	$-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6}\ln\left[\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left[\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$
$\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$	$-\frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}$
$\frac{1}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{Arctan}(1+x\sqrt{2}) - \operatorname{Arctan}(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x^2}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{Arctan}(1+x\sqrt{2}) - \operatorname{Arctan}(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x}{(x^4+1)^2}$	$\frac{\operatorname{Arctan} x^2}{4} + \frac{x^2}{4(x^4+1)}$
$\frac{x^2+x+1}{x^3-2x-4}$	$\frac{7}{10}\ln\lvert x-2\rvert + \frac{3}{20}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{10}\operatorname{Arctan}(x+1)$
$\frac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2}$	$\frac{4}{x} + \frac{3x}{2(x^2-1)} + \frac{11}{4}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert$
$\frac{1}{x^{20}-1}$	$\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}\left[\frac{1}{2}\cos k\alpha\ln(x^2-2x\cos k\alpha+1) - \sin k\alpha\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos k\alpha}{\sin k\alpha}\right)\right] + \frac{1}{20}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert, \quad \alpha = \frac{\pi}{10}$
$\frac{1}{(x-a)^n(x-b)}$	$\frac{1}{(b-a)^n}\ln\left\lvert\frac{x-b}{x-a}\right\rvert + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(b-a)^{n-k}(x-a)^k}$

Exercice 49 Établissez ces quelques primitives de fractions rationnelles.

$$\int_c^x \frac{2t+3}{(t-2)(t+5)}\,dt = \ln|(x-2)(x+5)| + C\,.$$
$$\int_c^x \frac{t}{(t-1)(t+1)(t+3)}\,dt = \frac{1}{8}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{8}\ln|x+3| + C\,.$$
$$\int_c^x \frac{1}{t^4-t^2-2}\,dt = -\frac{1}{3}\arctan x + \frac{\sqrt{2}}{12}\ln|x-\sqrt{2}| - \frac{\sqrt{2}}{12}\ln|x+\sqrt{2}| + C\,.$$
$$\int_c^x \frac{1}{(t^2-1)^2}\,dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1} + C\,.$$
$$\int_c^x \frac{t+1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + C\,.$$
$$\int_c^x \frac{1}{t(t^2+1)^2}\,dt = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + C\,.$$
$$\int_c^x \frac{1}{(t+2)(t^2+2t+5)}\,dt = \frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{10}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{10}\arctan(\frac{x+1}{2}) + C\,.$$
$$\int_c^x \frac{16}{t^2(t^2+2)^3}\,dt = -\frac{15x^4+50x^2+32}{4x(x^2+2)^2} - \frac{15\sqrt{2}}{8}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + C\,.$$

Exercice 50 Calculer les primitives de fractions rationnelles suivantes.

$$\int_c^x \frac{1}{t(t-1)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t^2-1}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t(t^2-1)}\mathrm{d}t\ ;$$
$$\int_c^x \frac{t}{t^2+4}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{t^3}{t^2+4}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{t^5}{t^2+3}\,\mathrm{d}t\ ;$$
$$\int_c^x \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{3t+2}{t^2+4}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{3t^2+2}{(t^2+4)(t-1)}\,\mathrm{d}t;$$
$$\int_c^x \frac{1}{t^2(t^2-1)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t(t^2-1)^2}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t^2(t^2-1)^2}\mathrm{d}t\ ;$$
$$\int_c^x \frac{1}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{t+1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t(t^2+1)^2}\mathrm{d}t\ ;$$
$$\int_c^x \frac{2t+3}{(t-2)(t+5)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{t}{(t-1)(t+1)(t+3)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{1}{t^4-t^2-2}\mathrm{d}t\ ;$$
$$\int_c^x \frac{1}{(t+2)(t^2+2t+5)}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{16}{t^2(t^2+2)^3}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_c^x \frac{t^4+1}{t(t-1)^3}\mathrm{d}t\,.$$

4 Applications du calcul intégral : longueurs, aires et volumes

4.1 Calculs d'aires remarquables

Exercice 51 Construire la courbe paramétrée $C\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\cos t}{1+\lambda\cos t} \\ y = \frac{\sin t}{1+\lambda\cos t}\end{array}\right.$ où λ est un paramètre appartenant à $[0,1[$.
Calculer l'aire S limitée par C de deux façons :

- En se ramenant au calcul de $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\lambda\cos t)^2}$.
- En reconnaissant la nature géométrique de C.

Exercice 52 Calculer $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$ (on posera $\theta = \arcsin\frac{x}{R}$) et en déduire l'aire d'un disque de rayon R.

Exercice 53 Calculer l'aire intérieure d'une ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

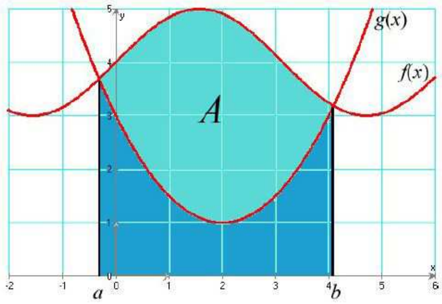
Indications. On pourra calculer seulement la partie de l'ellipse correspondant à $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Puis exprimer y en fonction de x. Enfin calculer une intégrale.

Exercice 54

- Soit l'ellipse $E \equiv 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$. Calculer l'aire de la surface de cette ellipse comprise entre les droites verticales contenant ses foyers.
- Calculer l'aire de l'ellipse $E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ comprise entre les droites d'équation $x = -\frac{a}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$.
- Calculer l'aire du cercle $C \equiv x^2 + y^2 = r^2$ comprise entre les droites d'équation $x = -\frac{r}{2}$ et $x = \frac{r}{2}$.
- Soit $f(x) = x.e^x$. Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et les droites verticales comprenant respectivement le minimum et le point d'inflexion de cette fonction.
- Soit $f(x) = x.e^{-x^2}$. Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et la droite verticale comprenant le maximum de cette fonction.
- Soit $E \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Calculer l'aire comprise entre cette ellipse et les droites verticales comprenant les foyers.

4.2 Aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$ telles que $f(x) \geqslant g(x)$, pour $a \leqslant x \leqslant b$. Calculons l'aire A du domaine délimité par ces deux courbes.



Si g est positive ($g \geqslant 0$) dans l'intervalle $[a, b]$, alors :

$$A = \ll \text{aire sous } f \gg - \ll \text{aire sous } g \gg$$

donc

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \tag{44}$$

Cette formule est aussi valable quand les fonctions ne sont pas partout positives. En effet, si g prend des valeurs négatives dans l'intervalle $[a, b]$, on translate les deux courbes verticalement vers le haut de sorte que la fonction g soit partout positive ou nulle. Il s'agit donc de trouver le minimum m de g sur $[a, b]$, puis de soustraire m (car $m < 0$) à $f(x)$ et à $g(x)$. Puisque les deux courbes sont translatées de la même façon, il est clair que l'aire entre les deux courbes ne va pas changer. On a alors :

$$A = \int_a^b [(f(x) - m) - (g(x) - m)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \tag{45}$$

Exercice 55

- On donne les fonctions f et g. Calculez l'aire du domaine borné délimité par les deux fonctions.
  - $f(x) = x^2$ et $g(x) = 8 - x^2$
  - $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = x^2 - x + 6$
  - $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ et $g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$
  - $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ et $g(x) = \sqrt{2x}$
- Calculez l'aire du domaine compris entre les courbes des fonctions f et g et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.
  - $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$, $a = -1$, $b = 2$
  - $f(x) = x^3$, $g(x) = x$, $a = 0$, $b = 2$
- Calculez l'aire du domaine compris entre les courbes $y = x$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, et les droites horizontales $y = 1$ et $y = 2$.

Exercice 56 Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ et $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

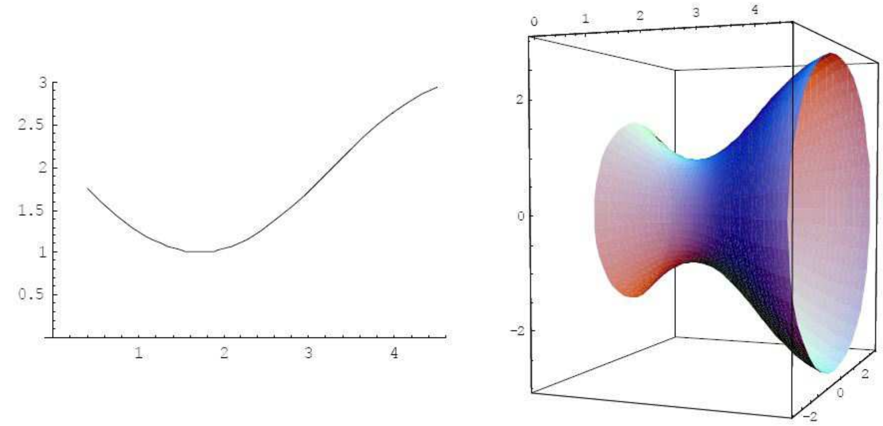
Exercice 57 Représenter et calculer l'aire comprise entre les graphes de f et g :

- $f(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x - 5)$ et $g(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$
- $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = -x + 2$ et $g(x) = x^2 - 4$
- $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = 3$
- $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ et entre les droites $x = 1$ et $x = 2$

4.3 Volume d'un solide de révolution

4.3.1 Méthode des disques

Soit f une fonction continue et non négative sur l'intervalle $[a,b]$. Trouvons le volume V du solide généré par la révolution autour de l'axe Ox de la portion de courbe $y=f(x)$ comprise entre $x=a$ et $x=b$.



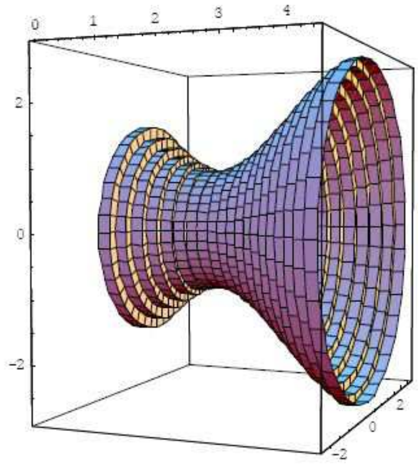
Volume de révolution obtenu en faisant tourner la courbe de gauche autour de l'axe Ox

L'idée est la même que lorsque l'on cherchait l'aire sous une courbe. On va découper l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de même largeur $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1},x_n]$, avec $x_0=a$ et $x_n=b$. La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle $[a,b]$ divisée par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire : $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. Pour chaque $i=0,1,\cdots,n-1$,on dessine un rectangle ayant comme base le segment x_ix_{i+1} et comme hauteur $f(x_i)$. Lorsqu'ils tourneront autour de l'axe Ox, chacun de ces rectangles va définir un cylindre très fin (presque un disque) de volume $\pi\left[f(x_i)\right]^2\Delta x$. Le volume du corps de révolution sera la somme de tous ces cylindres :

$$V=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi\left[f(x_i)\right]^2\Delta x \qquad (46)$$

qui n'est rien d'autre que l'intégrale définie :

$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x \qquad (47)$$



Volume de révolution approché par une série de cylindres

Exercice 58

- Calculez le volume des solides générés par la révolution autour de l'axe Ox des courbes suivantes et donnez le nom (quand ils en ont un) de ces solides :
  - $y=4 \qquad -1\leqslant x\leqslant 3$
  - $y=3x \qquad 0\leqslant x\leqslant 2$
  - $y=x+1 \qquad 0\leqslant x\leqslant 3$
  - $y=\sqrt{R^2-x^2} \qquad -R\leqslant x\leqslant R$
  - $y=\sqrt{3-x} \qquad x\geqslant -1$
  - $y=x^2 \qquad 0\leqslant x\leqslant 2$
- Donnez la formule permettant de trouver le volume engendré par une révolution autour de l'axe Oy, puis calculez le volume du solide généré par la révolution autour de l'axe Oy de la courbe : $y=x^3$,$0\leqslant y\leqslant l$.

- Trouvez le volume du corps engendré par la révolution autour de l'axe Oy de la courbe $x = \sqrt{l+y}$,$y \leqslant 3$.

Exercice 59

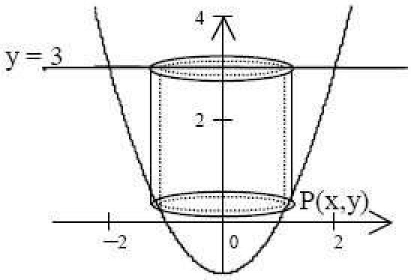
- Montrez que le volume d'un cône de rayon r e de hauteur h vaut $\frac{\pi r^2 h}{3}$.
- Montrez que le volume d'un tronc de cône de hauteur h et dont les rayons respectifs de la petite et la grande base sont r et R vaut $\frac{\pi h}{3}.(R^2 + rR + r^2)$.
- Montrez que le volume de la sphère de rayon R vaut $\frac{4}{3}\pi R^3$.
- Montrez que le volume de l'ellipsoïde de révolution, engendré par la rotation de l'ellipse $E \equiv x\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour de l'axe des x vaut $\frac{4}{3}\pi ab^2$.
- Montrez que le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x de l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ limité par l'origine et la droite d'équation $x = a$ vaut $\pi pa^2 = \frac{1}{2}\pi ab^2$ si $b = \sqrt{2pa}$ ce qui montre que le volume du paraboloïde de révolution vaut la moitié du volume du cylindre de même base et de même hauteur.
- Montrez que le volume du tore engendré par la rotation autour de l'axe des x d'un cercle de rayon r et de centre $(0, R)$vaut $2\pi^2 Rr^2$.

Exercice 60

- Calculer le volume d'un cône de révolution engendré par la rotation autour de l'axe x de la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$. Le cône est limité par l'origine et a pour hauteur h.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x du quadrilatère $ABCD$ si $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (3, 2)$ et $D = (3, 0)$.
- Calculer en fonction de a et b le volume de l'ellipsoïde de révolution compris entre les plans perpendiculaires à l'axe focal comprenant les points $(-\frac{a}{2}, 0)$ et $(\frac{a}{2}, 0)$ de l'ellipse génératrice d'équation $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.
- Calculer le volume du segment sphérique d'une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, compris entre les plans perpendiculaires à Ox aux points d'abscisse 0 et $\frac{r}{2}$.
- Calculer en fonction de a et b le volume de l'hyperboloïde de révolution compris entre les plans perpendiculaires à l'axe focal, comprenant les points $(a, 0)$ et $(2a, 0)$ de l'hyperbole génératrice d'équation $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la surface limitée par le graphe de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = 2a$ $(a > 0)$.
- Calculer le volume engendré par le cercle $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ dans sa rotation autour de l'axe Ox.
- Calculer le volume engendré dans sa rotation autour de l'axe Ox par la surface comprise entre les graphes de $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $g(x) = \frac{1}{4}(x + 7)$.
- Considérons la surface limitée par la parabole $\mathcal{P} \equiv y = 4 - x^2$ et la droite $y = 2$. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de la droite $y = 2$.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface limitée par la courbe $y = x^2 - 1$ et la droite $y = 2$.
-
  - Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la parabole $\mathcal{P} \equiv y^2 = 8x$ et la droite $\mathcal{D} \equiv x = 2$.
  - Calculer le volume engendré par la rotation autour de la droite $\mathcal{D}$ de cette surface.
- Calculer le volume engendré par la rotation de la surface limitée par $y = x^3$ et $y = 8$ et l'axe des ordonnées :
  - autour de l'axe des x
  - autour de la droite $\mathcal{D} \equiv x = 2$
- Calculer le volume engendré par la rotation de la surface limitée par les courbes $x = 9 - y^2$ et $x - y = y$:
  - autour de l'axe des ordonnées
  - autour de la droite $\mathcal{D} \equiv x = 2$
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface comprise entre la parabole $y = -x^2 - 3x + 10$ et la droite $y = 7 - x$.

4.3.2 Méthode des tubes

Nous introduisons le principe de la méthode à partir d'un exemple. Soit à calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface limitée par la parabole $y = x^2 - 1$ et la droite $y = 3$.



On peut considérer ce volume comme la somme d'une infinité de "tubes" de rayon r, d'épaisseur dx et de hauteur $3 - y$.
En approximant le volume de ce tube par celui d'un parallélépipède rectangle de longueur $2\pi x$, de hauteur $3 - y = 3 - x^2 + 1 = 4 - x^2$ et d'épaisseur dx, nous avons donc :

$$V = \int_0^2 2\pi x(4 - x^2)\mathrm{d}x = \int_0^2 2\pi(4x - x^3)\mathrm{d}x = 2\pi\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi\left[8 - \frac{16}{4}\right] = 8\pi$$

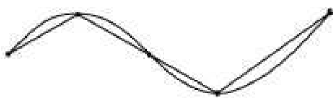
Exercice 61

- Soit la surface limitée par la parabole $y^2 = 8x$ et par la droite $x = 2$. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe des ordonnées.
- Soit la surface limitée par la parabole $y^2 = 8x$ et par la droite $x = 2$. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de la droite $x = 2$.
- Calculer le volume du tore engendré par la rotation du cercle $x^2 + y^2 = 4$ autour de la droite $x = 3$.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface limitée par la parabole $y = 2x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 5$.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de la droite d'équation $x = 6$ de la surface limitée par la parabole $y = 2x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 5$.
- Calculer le volume engendré par la rotation autour de la droite $y = 8$ de la surface limitée par la courbe $y = x^3$, l'axe des x et la droite $x = 2$.

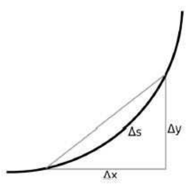
4.4 Longueur d'une courbe plane

Définition préalable
Une fonction est lisse sur un intervalle si sa dérivée est continue sur cet intervalle.

Soit f une fonction lisse dans l'intervalle $[a, b]$. Trouvons la longueur L de la courbe $y = f(x)$ de a à b.
L'idée consiste à découper l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$ $[x_{n-1}, x_n]$ de largeur Δx. On pose évidemment $x_0 = a$ et $x_n = b$. On relie ensuite par une ligne polygonale les points $P_0, P_1, \cdots, P_n$.



On obtiendra une bonne approximation de la longueur de la courbe en additionnant les longueurs L_k des n différents segments, pour $k = 1, \cdots, n$.
Regardons un segment.



Le théorème de Pythagore nous donne facilement sa longueur Δs :

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\Delta s = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}.\Delta x = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}.\Delta x$$

Si l'on regarde de segment $[x_{k-1}, x_k]$, on peut écrire :

$$L_k = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}.(x_k - x_{k-1})$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k) \qquad \text{où } x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

Par conséquent,

$$L_k = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}.\Delta x$$

Donc, la longueur de la ligne polygonale est

$$L = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}.\Delta x$$

Si nous augmentons maintenant le nombre de sous-intervalles de sorte que $\Delta x \to 0$, alors la longueur de la courbe polygonale va approcher la longueur de la courbe $y = f(x)$. Par définition, ce n'est rien d'autre que l'intégrale définie suivante :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x \tag{48}$$

Exercice 62

- Calculez la longueur de la courbe $y = 2x$ entre les points $(1, 2)$ et $(2, 4)$ en utilisant la formule ci-dessus, puis vérifiez votre réponse à l'aide du théorème de Pythagore.
- Calculez la longueur de la courbe $y = x^{\frac{3}{2}} - 1$ de$x = 0$ à $x = 1$.
- Calculez la longueur de la courbe $y = x^{\frac{2}{3}}$ de $x = 1$ à $x = 8$. Pourquoi ne peut-on pas utiliser telle quelle la formule pour calculer la longueur de cette courbe entre -1 et 8 ? Donnez un moyen de s'en sortir.
- Calculez la longueur de la courbe $y = \sqrt{1 - x^2}$ de $x = 0$ à $x = 1$.

Exercice 63

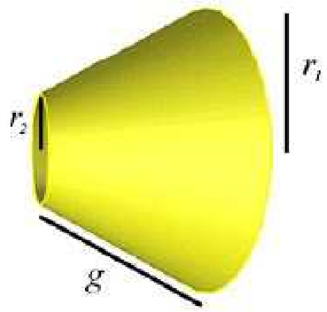
- Calculer la longueur du cercle de rayon R (par symétrie, on peut se limiter à la longueur du quart de cercle).
- Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \sqrt{x^3}$ entre les points $x = 0$ et $x = 5$.
- Calculer la longueur de l'arc de chaînette $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ de $x = 0$ à $x = a$.
- Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y^3 = 8x^2$ de $x = 1$ à $x = 8$.
- Calculer la longueur de l'arc de la courbe $6xy = x^4 + 3$ de $x = 1$ à $x = 2$.
- Calculer la longueur de l'arc de parabole $y^2 = 12x$ limité par la droite $x = 3$.

Exercice 64
Calculer la longueur des arcs de courbe suivants.

1. $y = \ln(1 - x^2)$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$
2. $y = x^{3/2}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 5$
3. $y = \ln(x)$ pour $1 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}$.

4.5 Aire d'une surface de révolution

Soit f une fonction lisse et non négative sur l'intervalle $[a, b]$. Trouvons l'aire de la surface générée par la révolution autour de l'axe Ox de la portion de courbe $y = f(x)$ comprise entre $x = a$ et $x = b$.
L'idée est un peu la même que pour calculer la longueur d'une courbe : on va approcher la courbe par une ligne polygonale. En faisant tourner cette ligne polygonale autour de l'axe Ox, la surface obtenue sera composée de troncs de cônes circulaires droits mis bout à bout.



Si r_1 est le rayon du grand cercle de base, r_2 le rayon du petit et g la longueur d'une génératrice du tronc de cône, son aire latérale vaut :

$$A_{cone} = \pi(r_1 + r_2).g$$

Reprenons notre surface de révolution dont on veut connaître l'aire. Coupons-la en tranches de largeur Δx, comme le ferait un boucher avec un jambon. Ces tranches sont ≪ à peu près ≫ des cônes tronqués. L'aire latérale du tronc de cône numéro k est :

$$A_k = 2\pi.f(m_k).L_k$$

avec m_k compris entre x_{k-1} et x_k et tel que $f(m_k) = \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$ (le théorème de la valeur intermédiaire nous assure que m_k existe). Lors des calculs de la longueur d'une courbe du paragraphe précédent, nous avons calculé que :

$$L_k = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}.\Delta x,$$

donc :

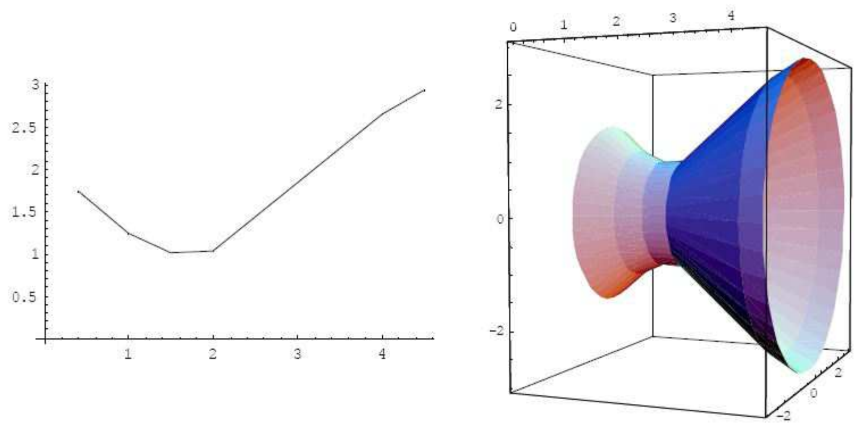
$$A_k = 2\pi.f(m_k).\sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}.\Delta x$$

L'aire de la surface totale est la somme :

$$A = \sum_{k=1}^{n} 2\pi.f(m_k).\sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}.\Delta x$$

Quand on augmente le nombre de segments, leur longueur diminue, et forcément ξ se rapproche de m. Si on suppose qu'à la limite ces points sont confondus (ce qui est le cas car f et f' sont continues), on trouve l'intégrale suivante :

$$A = 2\pi \int_a^b f(x).\sqrt{1 + [f'(x)]^2}.\mathrm{d}x \tag{49}$$



Surface de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe Ox la ligne polygonale approchant la courbe

De manière analogue, pour une fonction exprimée sous la forme $x = g(y)$, avec $g'(y)$ continue sur l'intervalle $[c, d]$ et $g(y) \geqslant 0$ pour $c \leqslant y \leqslant d$, l'aire de la surface générée par la révolution de $g(y)$ autour de l'axe Oy est donnée par la formule :

$$A = 2\pi \int_c^d g(y).\sqrt{1 + [g'(y)]^2}.\mathrm{d}y \tag{50}$$

Exercice 65
Trouver l'aire des surfaces engendrées par la rotation des arcs de courbes suivants

1. $4y = x^3$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, autour de Ox
2. $y^2 + 4x = 2\ln(y)$ pour $1 \leqslant y \leqslant 3$ autour de Oy.

Exercice 66

- Trouvez l'aire de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe Ox des courbes suivantes :
  - $y = \sqrt{1 - x^3} \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$
  - $y = 7x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$
  - $y = \sqrt{4 - x^2} \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$
- Trouvez l'aire de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe Oy des courbes suivantes :
  - $x = 9y + 1 \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$
  - $x = \sqrt{9 - y^2} \qquad -2 \leqslant y \leqslant 2$
  - $y = \sqrt[3]{3x} \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$

4.6 Exercices divers

Exercice 67 On appelle *tore* la figure obtenue par révolution d'un cercle de rayon r autour d'une droite de son plan passant à distance R de son centre (on suppose $r < R$). Calculer l'aire A du tore, et son volume V.

Exercice 68 On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur une droite en restant dans plan fixe. Montrer que dans un repère bien choisi, la cycloïde admet la représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{array}\right.$ Représenter la cycloïde et calculer : la longueur L d'une arche, l'aire A de la surface S comprise entre cette arche et la droite fixe (Ox), les volumes V_1 et V_2 obtenus par révolution de S autour de Ox et Oy respectivement, les aires A_1 et A_2 obtenues par révolution d'une arche de la cycloïde autour de Ox et Oy respectivement.

Exercice 69 On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r, lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur un cercle de rayon R en restant tangent extérieurement à ce dernier, et dans son plan. On pose $n = R/r$. Montrer que dans un repère que l'on précisera, l'épicycloïde admet la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\big((n+1)\cos t - \cos(n+1)t\big) \\ y & = & r\big((n+1)\sin t - \sin(n+1)t\big) \end{array}\right.$$

Représenter la courbe pour $n = 1, 2, 3$. En supposant n entier, calculer la longueur L de la courbe et l'aire A limitée par celle-ci. Dans le cas $n = 1$ (*cardioïde*), calculer de plus l'aire S de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe autour de son axe de symétrie, ainsi que le volume V limitée par cette surface.

Exercice 70 Soit C un cercle fixe de rayon R. Un cercle C' de même rayon roule sans glisser sur C en restant dans un plan (variable) perpendiculaire à celui de C. Un point M lié au cercle C' décrit une courbe Γ. Montrer que suivant un repère convenablement choisi, Γ admet la représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & R(\cos t + \sin^2 t) \\ y & = & R\sin t(1 - \cos t) \\ z & = & R(1 - \cos t) \end{array}\right.$. En déduire la longueur L de Γ. Représenter les projections de Γ sur chacun des trois plans de coordonnées.

5 Appendice A : rappel sur les fonctions hyperboliques

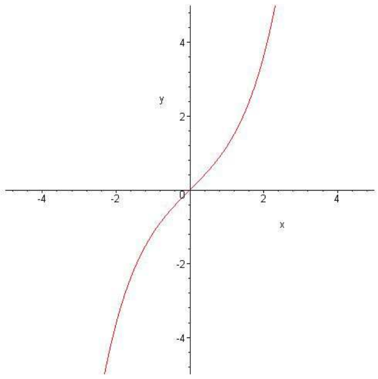
On appelle fonctions hyperboliques les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique. Les noms de sinus, cosinus et tangente proviennent de leur ressemblance avec les fonctions trigonométriques (dites « circulaires ») et le terme de hyperbolique provient de leur relation avec l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

5.1 Sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est définie comme étant la partie impaire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{51}$$

sinh – ou sh – est une bijection de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante, et impaire. Sa dérivée est le cosinus hyperbolique. Son application réciproque s'appelle argument sinus hyperbolique et est notée argsh ou argsinh.



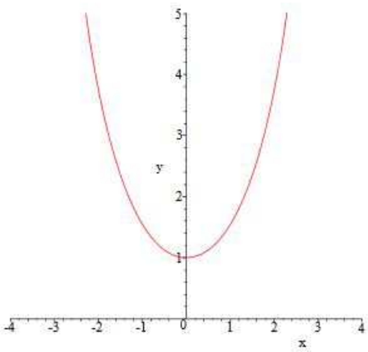
Remarque
La courbe est symétrique pour la symétrie centrale par rapport au point de coordonnées $(0; 0)$ ou $y(-x) = -y(x)$: la fonction sinus hyperbolique est impaire.

5.2 Cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est définie comme étant la partie paire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{52}$$

cosh – ou ch – est une application de $\mathbb{R}$ dans $[1; +\infty[$ strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et paire. cosh est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est le sinus hyperbolique. Sa restriction à $\mathbb{R}^+$ est une bijection à valeurs dans $[1; +\infty[$ dont l'application réciproque, argument cosinus hyperbolique, est notée argch ou argcosh.



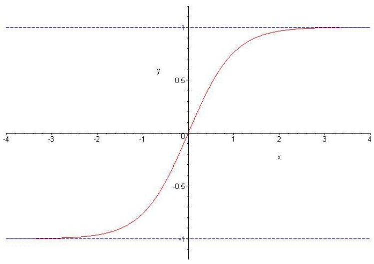
Remarque
La droite d'équation $y = 0$ est axe de symétrie de la fonction ou $y(x) = y(-x)$: la fonction cosinus hyperbolique est paire.

5.3 Tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique est définie par :

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{53}$$

th – ou tanh – est une bijection de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$ strictement croissante, et impaire. Sa dérivée est $\frac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2$. Son application réciproque s'appelle argument tangente hyperbolique et est notée argth ou argtanh.



Remarque
La fonction tangente hyperbolique est impaire.

5.4 Relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique

$$\forall x \in \mathbb{R} : \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \tag{54}$$

Cette relation permet une interprétation géométrique des fonctions hyperboliques (elles permettent une paramétrisation de l'hyperbole).

Preuve
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\ &= 1\end{aligned}$$

5.5 Exercices

Exercice 71 Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a sh$x \geqslant x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, ch$x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 72 Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Montrer que $\text{th}\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$, $\text{th}x = \sin y$ et $\text{ch}x = \frac{1}{\cos y}$.

Exercice 73 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, calculer

$$C = \sum_{k=0}^{n} \text{ch}(a + kb) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \text{sh}(a + kb)$$

Aide : calculer $C + S$ et $C - S$

Exercice 74 Soient a et α deux réels.
Résoudre le système d'inconnues x et y

$$\begin{cases} \mathrm{ch}x + \mathrm{ch}y = 2a\mathrm{ch}\alpha \\ \mathrm{sh}x + \mathrm{sh}y = 2a\mathrm{sh}\alpha \end{cases}$$

Aide : distinguer les cas $a = 1$, $a < 1$ et $a > 1$

Exercice 75 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{ch}x + \mathrm{sh}y = a \\ \mathrm{sh}x + \mathrm{ch}y = b \end{array} \right.$.

Exercice 76 Montrer que $\cosh nx$ et $\sinh nx$ peuvent s'exprimer comme polynômes en $\cosh x$ et $\sinh x$. Calculer $\cosh 3x$ et $\sinh 3x$ en fonctions de $\cosh x$ et $\sinh x$. En déduire $\tanh 3x$ en fonction de $\tanh x$.

Exercice 77 Exprimer $\cosh^n x$ et $\sinh^n x$ au moyen de $\{\sinh px, \cosh px \ ; \ 1 \leqslant p \leqslant n\}$. Expliciter $\cosh^5 x$ et $\sinh^5 x$.

Exercice 78 Démontrer les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes.

- $\cosh(a + b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$;
- $\sinh(a + b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$;
- $\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sin^2(a) = 2\cosh^2(a) - 1 = 1 + 2\sinh^2(a)$;
- $\cosh^2(a) = \dfrac{\cosh(2a) + 1}{2}$; $\sinh^2(a) = \dfrac{\cosh(2a) - 1}{2}$;
- $\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a)$; $\tanh(2a) = \dfrac{2\tanh(a)}{1 - \tanh^2(a)}$;
- en notant : $t = \tanh(x/2)$, $\sinh(x) = \dfrac{2t}{1 - t^2}$, $\cosh(x) = \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2}$, $\tanh(x) = \dfrac{2t}{1 + t^2}$;
- $\tanh(a + b) = \dfrac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$; $\tanh(a - b) = \dfrac{\tanh(a) - \tanh(b)}{1 - \tanh(a)\tanh(b)}$;
- $\sinh(a)\sinh(b) = \dfrac{1}{2}\Big(\cosh(a + b) - \cosh(a - b)\Big)$;
- $\sinh(a)\cosh(b) = \dfrac{1}{2}\Big(\sinh(a + b) + \sinh(a - b)\Big)$;
- $\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh\left(\dfrac{a + b}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{a - b}{2}\right)$;
- $\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\dfrac{a + b}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{a - b}{2}\right)$.

5.6 Fonctions hyperboliques réciproques

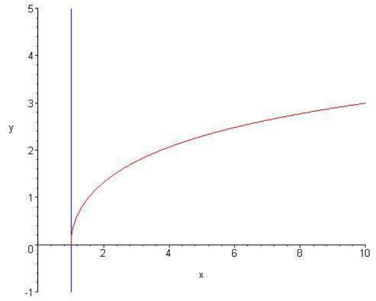
5.6.1 Argument cosinus hyperbolique

Définition
Comme la fonction cosh établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$, il existe une bijection réciproque.

On définit la fonction argument cosinus hyperbolique, notée Argch comme la réciproque de $\mathrm{ch}|_{\mathbb{R}^+}$.

Expression explicite de Argch
On montre que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ \text{Argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \tag{55}$$



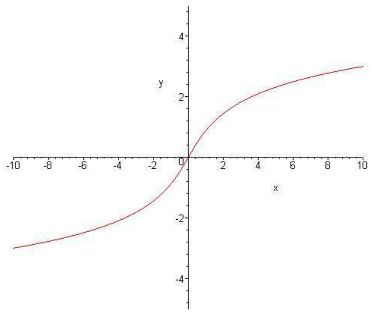
5.6.2 Argument sinus hyperbolique

Définition
Comme la fonction sinh établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, il existe une bijection réciproque.

On définit la fonction argument sinus hyperbolique, notée Argsh la réciproque de sh.

Expression explicite de Argsh

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \tag{56}$$



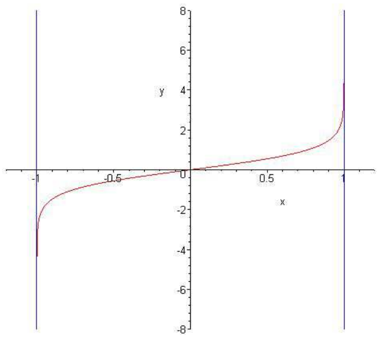
5.6.3 Argument tangente hyperbolique

Définition
Comme la fonction tanh établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$, il existe une bijection réciproque.

On définit la fonction argument tangente hyperbolique, notée Argth la réciproque de tanh.

Expression explicite de Argth

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \text{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \tag{57}$$



5.6.4 Dérivabilité des fonctions hyperboliques réciproques

- Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $\text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- Argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $\text{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Table des matières