Partie 3 : géométrie analytique dans un plan orthonormé

1 Modes de repérage dans le plan

1.1 Bases du plan et composantes des vecteurs

Définition
On dit que le couple de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ est :

- une *base* du plan $\mathcal{P}$ lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires ;
- une base *normée* si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de normes 1 (on dit *unitaires*) ;
- une base *directe* lorsqu'on tourne de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ dans le sens trigonométrique ;
- une base *orthogonale* si les directions des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonales ;
- une base *orthonormale* ou *orthonormée* si elle est orthogonale et normée (elle peut être directe ou indirecte).

Attention, afin de ne pas avoir de problème avec la notion de coordonnées, il ne faut pas confondre la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et la base $(\vec{j}, \vec{i})$. De plus, si l'une est directe, l'autre est indirecte.
L'intérêt de la notion de base est justifié par la proposition suivante.

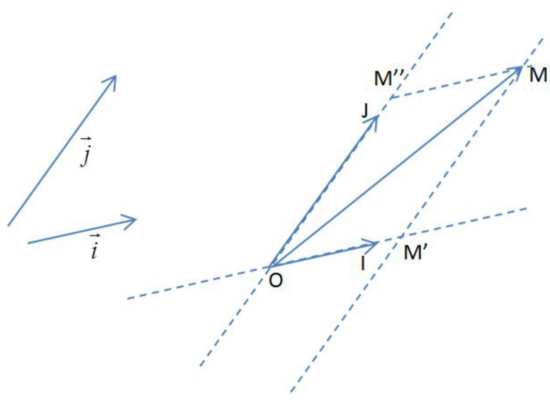
Théorème 1.1 *Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan $\mathcal{P}$, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$ il existe un unique couple de nombres réels (λ, μ) tel que :*

$$\vec{u} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j}$$

Ce couple (λ, μ) constitue les **composantes** *ou* **coordonnées** *du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.*

On note $\vec{u} = (\lambda, \mu)$ ou encore $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

Preuve Fixons un point O dans le plan et considérons les points I, J et M tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. La droite passant par M et parallèle à (OJ) coupe (OI) en M' et la parallèle à (OI) passant par M coupe (OJ) en M''.



Le quadrilatère $OM'MM''$ est alors un parallélogramme dans lequel on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$. Or $\overrightarrow{OM'}$ est colinéaire à $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM''}$ à $\vec{j}$, donc il existe deux réels λ et μ, tels que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM''} = \lambda\vec{j}$. Ainsi $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j}$. Reste à démontrer l'unicité du couple (λ, μ). Supposons que : $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} = \lambda'\vec{i} + \mu'\vec{j}$ et donc que $(\lambda - \lambda')\vec{i} = (\mu' - \mu)\vec{j}$. Il s'ensuit que $(\lambda - \lambda')\vec{i}$ et $(\mu' - \mu)\vec{j}$ sont colinéaires. Comme $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires, cela n'est possible que si $\lambda - \lambda' = \mu' - \mu = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu'$. Cela démontre l'unicité des composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

La proposition suivante énonce que les propriétés d'addition des vecteurs se transmettent aux coordonnées.

Théorème 1.2 *Soient $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans la base $((\vec{i},\vec{j})$ et λ, μ deux nombres réels. Alors le vecteur $\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}'$ est de coordonnées $(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y')$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.*

Preuve Cela découle de l'égalité vectorielle :

$$\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}'=\lambda(x\vec{i}+y\vec{j})+\mu\lambda(x'\vec{i}+y'\vec{j})=(\lambda x+\mu x')\vec{i}+(\lambda y+\mu y')\vec{j}$$

1.2 Repères du plan et coordonnées cartésiennes des points

Définition
Un *repère cartésien* $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan est la donnée d'un point O, appelé origine, et d'une base $(\vec{i},\vec{j})$ de $\mathcal{P}$.
Le repère est qualifiée de normé, orthogonal, orthonormal, direct ou indirect selon que la base est normée, orthogonale, orthonormale, directe ou indirecte.

Théorème 1.3 *Si $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$, alors, pour tout point M de $\mathcal{P}$, il existe un unique couple de nombres réels (x,y) tel que :*

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

Ce couple (x,y) constitue les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On note $M=(x,y)$ et l'on dit que x est l'abscisse et y est l'ordonnée de M.

Preuve Il suffit d'utiliser la proposition 1.1 avec $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.

Théorème 1.4 *Soient $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. On considère A, B deux points du plan de coordonnées respectives (x_A,y_A) et (x_B,y_B) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (x_B-x_A,y_B-y_A) dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.*

Preuve C'est une conséquence de la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_B\vec{i}+y_B\vec{j})-(x_A\vec{i}+y_A\vec{j})=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}$$

1.3 Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée du plan

L'expression du produit scalaire est particulièrement simple dans une base orthonormale (qu'elle soit directe ou indirecte).

Théorème 1.5 *Soient $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormale du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a,b) et (a',b') dans cette base. Alors :*

$$\vec{u}.\vec{v}=aa'+bb'$$

Preuve

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= (a\vec{i}+b\vec{j}).(a'\vec{i}+b'\vec{j})\\ &= aa'\vec{i}.\vec{i}+bb'\vec{j}.\vec{j}+(ab'+a'b).\vec{j}\\ &= aa'+bb' \qquad (1)\end{aligned}$$

puisque $\vec{i}.\vec{I}=\vec{j}.\vec{j}=1$ et $\vec{i}.\vec{j}=0$

Ce résultat permet d'exprimer analytiquement la norme d'un vecteur et donc aussi la distance entre deux points.

Théorème 1.6 *Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormale du plan $\mathcal{P}$. Si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées (a,b) dans cette base, alors :*

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (2)$$

Si A et B sont deux points du plan de coordonnées respectives (x_A,y_A) et (x_B,y_B) dans un repère de base $(\vec{i},\vec{j})$, alors :

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \qquad (3)$$

2 Droites du plan

2.1 Équation générale d'une droite du plan

On a vu que toute fonction du premier degré est représentée par une droite d'équation :

$$y = mx + p$$

mais que la réciproque est fausse ; en effet une droite verticale n'est pas le graphe d'une fonction. Les points d'une droite verticale sont caractérisés par leur abscisse $x = c$.

Une droite quelconque du plan (même verticale) est représentée par une équation du type :

$$ay + bx + c = 0 \tag{4}$$

avec a et b non tous deux nuls.

- Si a et b sont tous deux non nuls, cette équation se ramène directement (en divisant par a) à la forme $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ qui est de la forme générale $y = mx + p$ avec $m \neq 0$; cette dernière écriture constitue la première forme possible pour l'équation réduite d'une droite du plan et correspond à une droite qui n'est ni verticale, ni horizontale.
- Si $b = 0$, alors forcément $a \neq 0$ et en divisant par a les deux membres de l'équation, on obtient l'équation d'une droite horizontale :
$$y = -\frac{c}{a} \tag{5}$$
toujours du type général $y = mx + p$ avec $m = 0$.
- Si $a = 0$, alors forcément $b \neq 0$ et on peut donc diviser les deux membres de l'équation par b ce qui donne :
$$x = -\frac{c}{b} \tag{6}$$
qui constitue la deuxième forme possible de l'équation réduite d'une droite du plan.

L'inconvénient de cette représentation d'une droite du plan est que les coefficients a, b et c ne sont plus fixés de manière univoques, mais sont fixés à une constante multiplicative près. Par exemple, les deux équations :

$$2x - y + 3 = 0 \text{ et } -4x + 2y - 6 = 0$$

représentent la même droite du plan.

Propriétés

- si $b = 0$, la droite est horizontale
- si $a = 0$, la droite est verticale
- si $c = 0$, la droite passe par l'origine

2.2 Équation vectorielle et équations paramétriques d'une droite du plan

On appelle **équation vectorielle** d'une droite $\mathcal{D}$ passant par le point $P_0 = (x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ (où α et β ne sont pas tous deux nuls) l'écriture :

$$\mathcal{D} \equiv \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{u} \tag{7}$$

Dans cette équation, λ est un paramètre réel quelconque ; en coordonnées, cette équation vectorielle devient :

$$\mathcal{D} \equiv \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta \end{pmatrix} \tag{8}$$

équivalente au système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases} \tag{9}$$

qui constituent les **équations paramétriques** de la droite $\mathcal{D}$.

En éliminant le paramètre λ entre les deux équations, on obtient (en supposant par exemple que $\alpha \neq 0$) :

$$\lambda = \frac{x - x_0}{\alpha}$$

et donc l'équation cartésienne suivante pour la droite $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{x - x_0}{\alpha}\beta \\ \alpha y &= = \alpha y_0 + (x - x_0)\beta \\ 0 &= \alpha y - \beta x + (x_0\beta - \alpha y_0) \end{aligned} \tag{10}$$

qui est bien du type général $ay + bx + c = 0$ si l'on pose :

$$(b, a) = (-\beta, \alpha)$$

Remarquons que le vecteur $\vec{v}$ défini par ces coordonnées est perpendiculaire au vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite. En effet, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \\ \alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta \end{pmatrix} = -\beta\alpha + \alpha\beta = 0 \tag{11}$$

Réciproquement, soit une droite quelconque du plan, d'équation $ay + bx + c = 0$; comme a et b ne sont pas tous les deux nuls, on suppose pour fixer les idées que $a \neq 0$. Cette équation peut alors se mettre sous la forme :

$$y + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \quad = \quad 0$$

ou encore :

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a} \quad = \quad 0$$

Cette équation est équivalente à l'équation vectorielle suivante (écrite en coordonnées) :

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ -\frac{c}{a} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Cette dernière écriture montre que pour une droite quelconque d'équation $ay + bx + c = 0$, le vecteur $\vec{u}$ défini par :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \tag{13}$$

est un vecteur directeur de la droite, ainsi que tous ces multiples (comme $(a, -b)$ ou $(-a, b)$ par exemple). Ce vecteur étant perpendiculaire au vecteur $\vec{v}$ de coordonnées :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \\ a \end{pmatrix} \tag{14}$$

c'est-à-dire le vecteur dont les coordonnées sont les coefficients des coordonnées x et y dans l'équation de la droite, ceci constitue donc un moyen simple et facile à retenir pour trouver le vecteur directeur d'une droite et le vecteur qui lui est perpendiculaire dans le plan Oxy.

Par exemple, la droite $\mathcal{D} \equiv 2x - 3y + 4 = 0$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{v} = (b, a) = (2, -3)$ et admet donc pour vecteur directeur par exemple le vecteur $\vec{u} = (1, -\frac{b}{a}) = (1, \frac{2}{3})$.

2.3 Parallélisme et perpendicularité de droites dans le plan

Théorème 2.1 *Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}\prime$ d'équations :*

$$\mathcal{D} \equiv ay + bx + c = 0 \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{D}' \equiv a'y + b'x + c' = 0$$

On a :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' & \Leftrightarrow & ab' = a'b \\ \mathcal{D} \perp \mathcal{D}' & \Leftrightarrow & aa' + bb' = 0 \end{array}$$

Preuve Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si elles ont les mêmes vecteurs directeurs ou, ce qui revient au même, si et seulement si un vecteur perpendiculaire à l'une des droites est aussi perpendiculaire à l'autre. Comme $\vec{v} = (b, a)$ est un vecteur perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et $vecu' = (a', -b')$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$; on a donc comme annoncé :

$$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \vec{u}'.\vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ \\ -b' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b \\ \\ a \end{pmatrix} = a'b - b'a = 0 \tag{15}$$

De la même manière, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ seront perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u} = (a, -b)$ et $\vec{u}' = (a', -b')$ sont perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire :

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{u}' = \begin{pmatrix} a \\ \\ -b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' \\ \\ -b' \end{pmatrix} = aa' + bb' = 0 \tag{16}$$

2.4 Exercices

Exercice 1 Résoudre graphiquement puis algébriquement :

- Déterminer l'équation de la droite qui est parallèle à la droite $y = \frac{1}{2}x + 2$ et qui passe par le point $(3, -5)$.
- Déterminer l'équation de la droite qui est perpendiculaire à la droite $y = -\frac{4}{7}x + 2$ et qui passe par le point $(6, -2)$.
- Déterminer l'équation de la droite qui est perpendiculaire à la droite $y = 3x$ et dont l'ordonnée à l'origine est $3/7$.

Exercice 2
- Déterminer l'équation de la droite parallèle à la droite $y = 2$ et qui passe par le point $(-166, 9)$.
- Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à la droite $x = -9$ et qui passe par le point $(-3, -7)$.
- Déterminer l'équation de la droite passant par les points $(0, 2)$ et $(-4, 3)$.

Exercice 3 Déterminer un vecteur directeur et le coefficient directeur de chacune des droites suivantes :

- $\mathcal{D} \equiv 2x - 5y + 7 = 0$

- $\mathcal{D}' \equiv 3y - 4x = 0$
- $\mathcal{D}'' \equiv -x = y$

Exercice 4 Soit Π un plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points et les vecteurs sont exprimés par leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$.

- Donner un vecteur directeur, la pente, une équation paramétrique et une équation cartésienne des droites (AB) suivantes :
  - $A = (2, 3)$ et $B = (-1, 4)$
  - $A = (-7, -2)$ et $B = (-2, -5)$
  - $A = (3, 3)$ et $B = (3, 6)$
- Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites passant par A et dirigées par $\vec{v}$ avec :
  - $A = (2, 1)$ et $\vec{v} = (-3, -1)$
  - $A = (0, 1)$ et $\vec{v} = (1, 2)$
  - $A = (-1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 0)$
- Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites définies comme suit :
  - passant par le point $(0, 4)$ et de pente 3,
  - passant par le point $(2, -3)$ et parallèle à l'axe des x,
  - passant par le point $(-2, 5)$ et parallèle à la droite $\mathcal{D} \equiv 8x + 4y = 3$.

Exercice 5 Écrivez l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $(-5, -3)$ et perpendiculaire à la droite $\Delta \equiv 5x + 4y - 20 = 0$.

Exercice 6 Trouver une équation de la droite $\mathcal{D}'$ qui passe par A et qui est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ dans les cas suivants :

- $A = (1, 1)$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $x + y - 5 = 0$
- $A = (-2, 3)$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $2x - y + 2 = 0$

Exercice 7

- Placer les points $A = (3, 6)$, $B = (1, 2)$, $C = (5, 4)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.
- Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
- Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 8 Soit le repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points : $A = (3, 2)$ et $N = (2, n)$, avec $n \in \mathbb{R}$

- Déterminer, en fonction de n, une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_n$ passant par les points A et N.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{R}$, la droite $\mathcal{D}_n$ passe par un point fixe du plan, dont on déterminera les coordonnées.
- Calculer la valeur de n pour laquelle la droite $\mathcal{D}_n$ est perpendiculaire à la droite $\Delta \equiv 2x + 3y + 1 = 0$
- Déterminer n pour que la droite $\mathcal{D}_n$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

2.5 Intersections de deux droites du plan

L'intersection de deux droites du plan est

- un point lorsque les deux droites ne sont pas parallèles ;
- l'ensemble vide lorsque les droites sont strictement parallèles (c'est-à-dire parallèles et non confondues) ;
- une droite lorsque les deux droites sont confondues.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

- Si les deux droites sont données par des équations cartésiennes, il suffit de résoudre le système constitué des deux équations (cf. théorème 2.2).
- Si l'une des droites est donnée par une équation cartésienne et l'autre par une représentation paramétrique, il suffit d'injecter dans l'équation cartésienne les expressions de x et y données par la représentation paramétrique de la seconde droite. On détermine ainsi la valeur du paramètre correspondant au point d'intersection. (Si les droites sont strictement parallèles, on ne trouve aucune valeur valeur possible pour le paramètre et si les droites sont confondues, tous les nombres réels conviennent...)
- Enfin, si les deux droites sont données par des représentations paramétriques, on recherche une équation cartésienne de l'une pour se ramener au cas précédent.

Théorème 2.2 *Les droites du plan $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes :*

$$\mathcal{D} \equiv ay + bx + c = 0 \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{D}' \equiv a'y + b'x + c' = 0$$

ont une intersection si et seulement si :

$$ab' - a'b \neq 0 \tag{17}$$

Le point d'intersection P est alors unique et a pour coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-ac'+a'c}{ab'-a'b} \\ \\ y = \frac{-cb'+c'b}{ab'-a'b} \end{array} \right. \tag{18}$$

Preuve La condition est clairement nécessaire et suffisante puisqu'elle constitue la négation de la proposition $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'' = a'b$ et que deux droites du plan qui ne sont pas parallèles ont bien entendu une et une seule intersection.
De plus, on peut vérifier directement l'appartenance du point P aux deux droites en remplaçant x et y par les expressions proposées.
Une méthode plus constructive peut bien entendu être suivie pour aboutir à ces formules, par exemple celle-ci, utilisant le calcul matriciel ; le système auquel doivent obéir les coordonnées d'un éventuel point d'intersection s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{r} ay + bx + c = 0 \\ \\ a'y + b'x + c' = 0 \end{array} \right. \tag{19}$$

et est équivalent à l'équation matricielle suivante :

$$A.\begin{pmatrix} y \\ \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \\ a' & b' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ \\ x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c \\ \\ c' \end{pmatrix} \tag{20}$$

Sous la condition $ab' - a'b \neq 0$, la matrice A est inversible et la solution unique de l'équation matricielle ou du système formé par les équations des deux droites s'obtient directement par la formule :

$$\begin{pmatrix} y \\ \\ x \end{pmatrix} = -A^{-1}. \begin{pmatrix} c \\ \\ c' \end{pmatrix} = -\frac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} b' & -b \\ \\ -a' & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ \\ c' \end{pmatrix} \tag{21}$$

Voici une autre méthode, directe, utilisant le calcul des déterminants (méthode de Cramer) :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{-cb' + c'b}{ab' - a'b} \tag{22}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{-ac' + a'c}{ab' - a'b} \tag{23}$$

Remarque : pour un système de deux équations à deux inconnues, on privilégie en général une résolution ”à la main” (par exemple par substitution et élimination d'une des variables) à l'utilisation de ces formules.

Exercice 9 Déterminer les intersections éventuelles des paires de droites suivantes :

- $\mathcal{D} \equiv 2x + y - 1 = 0$ et $\mathcal{D}' \equiv 4x + 2y - 5 = 0$
- $\mathcal{D} \equiv x + 3y - 1 = 0$ et $\mathcal{D}' \equiv -2x - 6y = -2$
- $\mathcal{D} \equiv x + y = 1$ et $\mathcal{D}' \equiv 2x - 3y = -3$
- $\mathcal{D} \equiv 2x + 3y - 8 = 0$ et $\mathcal{D}' \equiv 4x + y = 6$
- $\mathcal{D} \equiv 2x + y - 1 = 0$ et $\mathcal{D}' \equiv x - 2y - 3 = 0$

Exercice 10 On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) \equiv x + 2y = 3$, $(AC) \equiv x + y = 2$, $(BC) \equiv 2x + 3y = 4$:

- Donner les coordonnées des points A, B, C.
- Donner les coordonnées des milieux A', B', C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
- Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

Exercice 11 Déterminer le projeté orthogonal du point $M(x_0, y_0)$ sur la droite $\mathcal{D} \equiv 2x - 3y = 5$ ainsi que son symétrique orthogonal.

Exercice 12 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan ; déterminer l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ représentées paramétriquement par les équations :

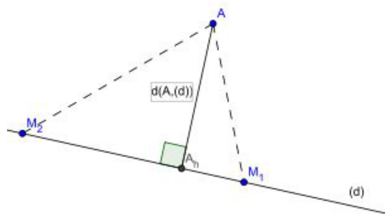
$$\mathcal{D} \equiv \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -t + 5 \end{cases} \tag{24}$$

et :

$$\mathcal{D}' \equiv \begin{cases} x = 3t' - 3 \\ y = -t' + 4 \end{cases} \tag{25}$$

2.6 Distance d'un point à une droite

En géométrie euclidienne, la distance d'un point à une droite est la plus courte distance séparant ce point et un point courant de la droite.



Le théorème de Pythagore permet d'affirmer que la distance du point A à la droite (d) correspond à la distance séparant A de son projeté orthogonal A_h sur la droite (d). On peut ainsi écrire :

$$d(A,(d)) = d(A, A_h) = ||\overrightarrow{\mathrm{AA}_h}||$$

Si le plan est muni d'un repère orthonormal, si la droite (d) a pour équation $(d) \equiv ax + by + c = 0$ et si le point A a pour coordonnées $(x_A; y_A)$, alors la distance entre A et (d) est donnée par la formule :

$$d(A,(d)) = \frac{|\ ax_A + by_A + c\ |}{\sqrt{a^2 + b2}} \tag{26}$$

En effet, si $M = (x, y)$ est un point quelconque de la droite (d), et si on note $\vec{n}$ le vecteur normal à la droite (d), qui a pour composantes (a, b), alors la valeur absolue du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{n}$ est donnée d'une part par l'expression :

$$|\ \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}\ |=|\ a(x - x_\mathrm{A}) + b(y - y_\mathrm{A})\ |=|\ ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + c\ |$$

où l'on a utilisé le fait que $ax + by = -c$ car M est un point de (d)), mais aussi d'autre part par l'expression :

$$|\ \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}\ |= ||\overrightarrow{\mathrm{AM}}||.||\vec{n}|||\cos < \overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{n} >= ||\overrightarrow{\mathrm{AA}_h}||.||\vec{n}|| = ||\overrightarrow{\mathrm{AA}_h}||.\sqrt{a^2 + b^2}.$$

En égalant ces deux expressions, on obtient le résultat annoncé.

Exercice 13 Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$. Montrer qu'il existe un point Ω équidistant de toutes les droites D_λ.

3 Cercles du plan

Rappel
Un *lieu géométrique* est un ensemble de points possédant une même propriété. L'équation du lieu est une relation que vérifient ces points et seulement ces points.

3.1 Définition

Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$ et R un réel positif ou nul ; on appelle cercle de centre Ω et de rayon R et on note $\mathcal{C}(\Omega, R)$ le lieu géométrique des points M du plan dont la distance au point Ω est constante et égale à R.

$$M \in \mathcal{C}(\Omega, R) \Leftrightarrow ||\ \overrightarrow{\Omega M}\ || = R$$

Théorème 3.1 *Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan. Alors :*

- *Tout cercle admet une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 - 2cx - 2dy + e = 0$*
- *Réciproquement, une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2-2cx-2dy+e = 0$, représente soit l'ensemble vide si $c^2 + d^2 - e < 0$, soit le cercle de centre $\Omega = (c, d)$ et de rayon $R = \sqrt{c^2 + d^2 - e}$ si $c^2 + d^2 - e \geqslant 0$.*

Preuve Si on note (c, d) et (x, y) respectivement les coordonnées du point Ω et celles du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(\Omega, R) &\Leftrightarrow \ || \overrightarrow{\Omega M} || = R \\ &\Leftrightarrow \ \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = R \\ &\Leftrightarrow \ (x-c)^2 + (y-d)^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 - 2cx - 2dy + c^2 + d^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 - 2cx - 2dy + e = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

où l'on a posé $e = c^2 + d^2 - R^2$.

Des équations paramétriques possibles du cercle de centre (a, b) et de rayon R (en fonction du paramètre θ qui exprime ici un angle orienté du vecteur joignant le centre du cercle à un de ces points par rapport au vecteur horizontal unité du repère) sont données par :

$$\begin{aligned} x &= a + R\cos\theta\,; \\ y &= b + R\sin\theta, \end{aligned} \tag{28}$$

soit pour le cercle unité de centre $(0, 0)$ et de rayon $R = 1$:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\,; \\ y &= \sin\theta \end{aligned} \tag{29}$$

Exercice 14 Déterminer le centre, le rayon et les équations paramétriques des cercles suivants :

- $3x^2 + 3y^2 + 42x - 6y + 75 = 0$
- $x^2 + y^2 + 5x - 15y + 20 = 0$
- $x^2 + y^2 + x = 0$
- $x^2 + y^2 + 10x + 4y - 35 = 0$

Exercice 15 Déterminer l'équation du cercle comprenant les points $A = (-3, 1)$, $B = (1, -1)$ et $C = (3, 0)$.

Exercice 16 Déterminer l'équation des cercles :

- de centre $\Omega = (2, 3)$ et de rayon $R = 5$
- de centre $\Omega = (2, 5)$ et passant par le point $(6, 1)$
- de diamètre AB avec $A = (3, 1)$ et $B = (5, -2)$

3.2 Intersection d'une droite et d'un cercle

L'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R est formée de :

- deux points distincts si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$,
- un point unique T si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, on dit alors que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont tangents en T,
- l'ensemble vide si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan.

- Pour déterminer l'intersection de la droite $\mathcal{D} \equiv ax+by+c = 0$ et du cercle $\mathcal{C} \equiv x^2+y^2-2Cx-2Dy+E = 0$, on procède par substitution, c'est-à-dire que l'on tire x en fonction de y (ou y en fonction de x) à l'aide de l'équation de la droite puis on reporte cette expression dans l'équation du cercle. Cela fournit une équation du second degré en y (ou en x) dont les solutions (il y en a 0, 1 ou 2) sont les ordonnées (ou les abscisses) des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.
- Pour étudier l'intersection d'un cercle donné par l'une de ses équations cartésiennes et d'une droite représentée paramétriquement, on substitue les coordonnées données par la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du cercle et l'on en déduit les éventuelles valeurs du paramètre, ce qui fournit les coordonnées des points d'intersection (s'il en existe).

Exercice 17 Trouver l'intersection du cercle $\mathcal{C} \equiv x^2 - 2x + y^2 + 4y - 10 = 0$ avec la droite $\mathcal{D} \equiv y = 2x + 1$. Représenter la situation.

Exercice 18 Trouver l'intersection du cercle de centre $(2, -3)$ et de rayon 5, avec les droites

- $\mathcal{D}_1 \equiv x = 7$
- $\mathcal{D}_2 \equiv y = -8$
- $\mathcal{D}_3 \equiv 4y = -3x + 19$
- $\mathcal{D}_4 \equiv y = x + 3$
- $\mathcal{D}_5 \equiv y = l$

Exercice 19 Soit le cercle $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2|6x + 6y = 0$ et la droite $\mathcal{D} \equiv y = mx + 1$. Déterminer le nombre de points d'intersection du cercle et de la droite lorsque m varie.

Exercice 20 Trouver l'équation de la tangente au cercle de centre $(2, -3)$ et de rayon 5, aux points d'abscisses 2, 5 et 7.

Exercice 21 Trouvez l'équation du cercle $\mathcal{C}$ tangent à la droite $\mathcal{D}4x - 3y + 15 = 0$ en $T = (0, 5)$ et passant par le point $A = (4, 7)$.

Exercice 22 Déterminez les intersections des droites et cercles suivants :

- $\mathcal{D} \equiv 2x - y = 3$ et $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$
- $\mathcal{D} \equiv x - 2y = 1$ et $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 - 8x + 2y = -12$

Exercice 23 Déterminez l'équation du cercle qui passe par $A = (-2, 1)$ et qui est tangent à la droite $\mathcal{D} \equiv 3x - 2y - 6 = 0$ en $B = (4, 3)$.

Exercice 24 Déterminer l'équation du cercle passant par $A = (2, -1)$ et $B = (3, 0)$ et dont le centre Ω se trouve sur la droite $\mathcal{D} \equiv 4x - 3y + 2 = 0$.

Exercice 25 Déterminez l'équation du cercle tangent aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et dont le centre se trouve sur la droite $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{D} + y + 4 = 0 \qquad \mathcal{D}' \equiv 7x - y + 4 = 0 \qquad \mathcal{M} \equiv 4x + 3y - 2 = 0$$

3.3 Intersection de deux cercles

L'intersection de deux cercles de rayons respectifs R et r et de centres respectifs Ω et ω est constituée de :

- deux points lorsque $\mid R - r \mid < \mid\mid \overrightarrow{\Omega\omega} \mid\mid < R + r$
- un unique point (dit de tangence) lorsque $\mid\mid \overrightarrow{\Omega\omega} \mid\mid = \mid R - r \mid$ ou $\mid\mid \overrightarrow{\Omega\omega} \mid\mid = R + r$
- l'ensemble vide lorsque $\mid\mid \overrightarrow{\Omega\omega} \mid\mid < \mid R - r \mid$ ou $\mid\mid \overrightarrow{\Omega\omega} \mid\mid > R + r$

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan. Pour déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection des cercles d'équations $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 - 2cx - 2dy + e = 0$ et $\mathcal{C}' \equiv x^2 + y^2 - 2Cx - 2Dy + E = 0$, on fait la différence des deux équations : $(2C - 2c)x + (2D - 2d)y + E - e = 0$. On trouve ainsi l'équation d'une droite $\mathcal{D}$ (sauf dans le cas où $c = C$ et $d = D$ qui correspond à des cercles concentriques). Cette droite est appelée l'*axe radical* des deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont alors les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$, que l'on sait déterminer.

Exercice 26 Déterminer l'équation du cercle γ passant par les points d'intersection de $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2x = 0$ et passant par le point $P = (3, 2)$.

Exercice 27 Cherchez l'équation d'un cercle tangent à l'axe Oy et passant par les points d'intersection des cercles $\gamma \equiv x^2 + y^2 - 9x - 2y + 5 = 0$ et $\gamma' \equiv x^2 + y^2 - 6x - 14y + 17 = 0$.

Exercice 28 Soient les deux cercles $\gamma \equiv x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ et $\gamma' \equiv x^2 + y^2 - 10x + 20y + 35 = 0$. Déterminer l'équation du cercle σ qui passe par $A = (3, -1)$ et qui a le même axe radical que γ et γ'. Quelle est l'équation de la tangente à σ en A ?