Chapitre 3 : acoustique physique

1 Introduction

L'*acoustique physique* fait partie de la *mécanique des milieux continus*. C'est l'étude des *ondes mécaniques* qui se propagent dans les *milieux matériels*. L'objet de cette annexe est l'étude de la *propagation de ces ondes dans les fluides* (principalement l'*air*). Quelques éléments sur la *propagation libre dans les solides* seront également donnés.

Pour réaliser une *transmission acoustique*, il faut :

- ✓ *un ou plusieurs émetteurs* ;
- ✓ *un milieu de transmission ou de propagation* ;
- ✓ *un récepteur*.

Le *principe de la transmission* repose sur l'*existence de particules capables de modifier leur position d'équilibre* : le *milieu de transmission* (fluide ou solide) est en effet un *milieu élastique*, c'est-à-dire un *milieu qui retrouve sa position d'équilibre quand l'excitation a cessé*.

La particule B, voisine de la particule A à laquelle on impose un déplacement fonction du temps est entraînée grâce aux *forces de liaisons élastiques* avec un certain retard ; B joue alors le rôle de source pour C et ainsi, de proche en proche, l'onde se propage.

Qu'est-ce qu'une *particule* ? c'est un *élément de volume* :

- ✓*suffisamment grand* pour contenir des *millions de molécules* pour que le *milieu* puisse être pensé comme *continu* ;

- ✓et cependant *suffisamment petit* pour que les *paramètres acoustiques* (et autres) puissent y être considérés comme *constants*

2 Propagation des ondes acoustiques dans un fluide

2.1 définitions, notations et hypothèses simplificatrices

Les ondes acoustiques sont des ondes qui se traduisent par une *succession de compressions et de détente alternées*.

Dans un fluide la *force de rappel* est due aux *propriétés thermodynamiques* du fluide. Il faudra donc préciser les *conditions thermodynamiques* de son évolution.

Le *référentiel* est supposé *galiléen* : *on ne tient pas compte des forces d'entraînement et de Coriolis dues à la rotation de la terre*.

Au repos, l'état du fluide est caractérisé par :

- ✓la *masse volumique* ρ_0 supposée *constante* ;
- ✓la *pression* P_0 supposée *constante* ;
- ✓le *champ de vitesses nul*.

L'onde acoustique correspond à la *propagation d'une perturbation de cet état*.

On décrit alors localement l'état du fluide au *point* : $\vec{r} = x\vec{1_x} + y\vec{1_y} + z\vec{1_z}$

à l'instant *t*, par la *masse volumique* : $\rho(\vec{r},t)$

la *pression* : $p(\vec{r},t)$

et la *vitesse* : $\vec{V}(\vec{r},t)$ de la particule.

✓*En l'absence de perturbation acoustique*, le *fluide* est *au repos* ; ses *caractéristiques* ont des *valeurs uniformes dans l'espace et dans le temps*.

✓Le fluide est également supposé *homogène*, *isotrope*, et on négligera les *effets de dissipation* tels que ceux provenant de la *viscosité* ou de la *conduction thermique*.

✓Lorsque la *pression* d'un fluide est *modifiée*, la *température évolue dans le même sens* et il se produit alors un *transfert de chaleur* des zones « *chaudes* » (en compression) vers les régions « *froides* » (en détente). Mais *ce transfert s'effectue à une vitesse de l'ordre de 0,5 m/s dans l'air* soit *700 fois inférieure à la célérité du son*. Ces effets thermiques sont donc négligeables et les phénomènes de propagation acoustiques seront toujours supposés *adiabatiques* (*sans échanges de chaleur*).

Toutes ces hypothèses sont nécessaires pour construire un *modèle simple de la propagation des ondes acoustiques dans les fluides*.

L'expérience montre que ce modèle simple décrit de manière adéquate les phénomènes acoustiques les plus courants.

Il existe cependant des situations où ces hypothèses ne sont plus valables et pour lesquelles il sera nécessaire d'adapter le modèle pour prendre en compte des phénomènes initialement négligés.

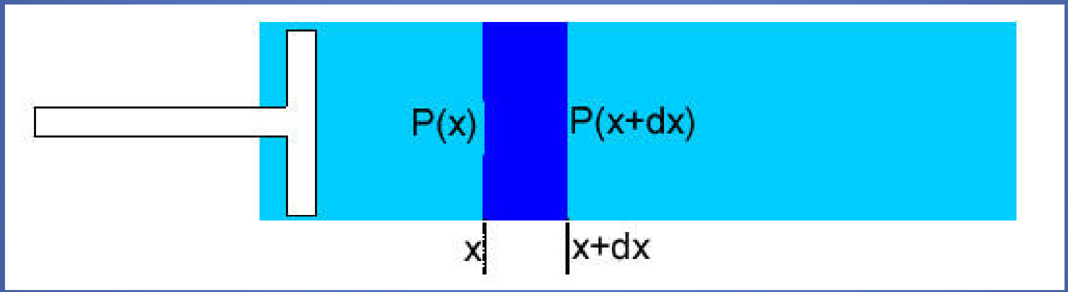
2.2 ondes acoustiques planes dans un fluide

2.2.1 définition

La propriété caractéristique des *ondes planes* est que *chaque variable* (déplacement de la particule, densité, pression...) *a une amplitude constante sur un plan donné perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde* (on parle alors de *plan d'onde*)

Les ondes planes peuvent être produites facilement dans un fluide confiné dans un tuyau rigide par l'action d'un piston situé à l'une des extrémités du tuyau et vibrant à une basse fréquence.

2.2.2 propagation unidimensionnelle (exemple d'un tuyau cylindrique)



On suppose la *section constante*, les *parois rigides* et le *fluide au repos*.

On considère une *tranche de fluide* de *section A* comprise *entre les abscisses x* et *x+dx*. Le déplacement brusque et limité vers la droite d'un piston à l'une des extrémités du tuyau provoque une *surpression de la tranche* qui va *comprimer la tranche suivante* en revenant à sa position d'équilibre *et de proche en proche la surpression va se propager vers la droite*.

Cette variation de pression va entraîner, comme on l'a déjà vu, une *variation de température* et *de masse volumique*.

2.2.3 équations de conservation unidimensionnelles

✓ *Conservation de la quantité de mouvement*

Appliquons le *théorème fondamental de la dynamique* ($\sum \vec{F} = M.\vec{a}$) à la tranche de fluide :

$$\rho A dx \frac{dV}{dt} = AP(x) - AP(x+dx) = A\frac{\partial P}{\partial x}dx$$

où : dV/dt représente l'*accélération* de chaque particule fluide, c'est-à-dire la *variation de vitesse* observée quand on suit la particule dans son mouvement durant le *temps dt* ;

et : $\partial P/\partial x$ représente le *gradient de la pression à l'instant t considéré*, c'est-à-dire la *pente de la pression* entre les deux faces de la tranche de fluide.

Or, $$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}dx, \text{ donc : } \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}$$

où : $\partial V/\partial t$ est la *variation de vitesse entre deux instants au même point x* ;

et : $\partial V/\partial x$ est la *pente de la vitesse prise au même instant entre deux points distants de dx*.

Par ailleurs, en se limitant *au premier ordre de la perturbation*, on a les trois relations :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad , \quad \vec{V} = \vec{0} + \vec{V_1} \quad , \quad P = P_0 + p_1$$

et l'*équation de Newton* se ramène *au premier ordre* à :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}}$$

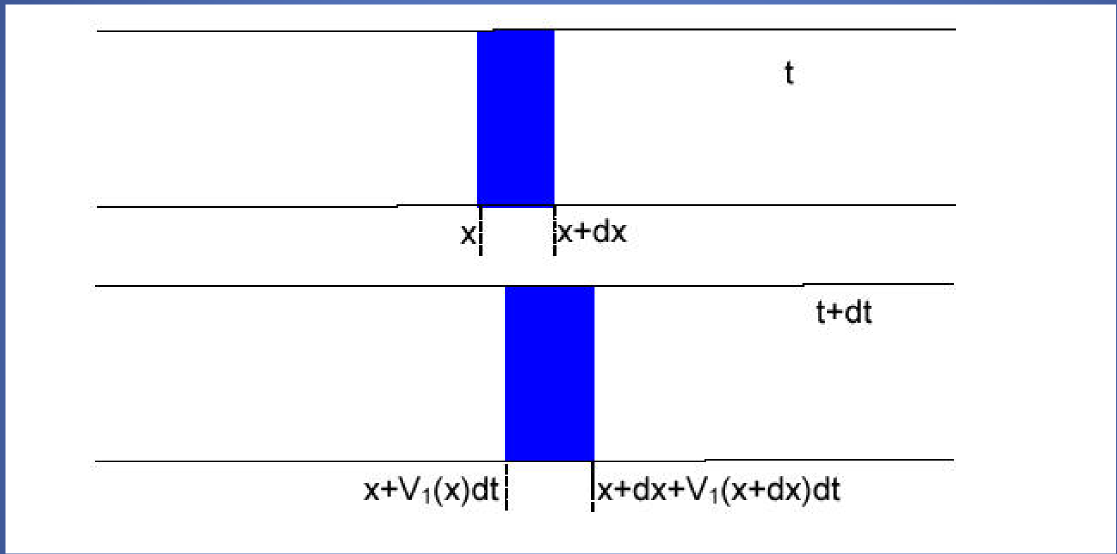
puisqu'au premier ordre : $\frac{dV_1}{dt} \approx \frac{\partial V_1}{\partial t}$

✓*Conservation de la masse*

La *tranche de fluide* comprise *entre x et x+dx à l'instant t* a pour *masse dm = ρAdx*.

A l'instant t+dt, cette *même masse* s'exprime sous la forme :

$$dm = (\rho + d\rho)A\left(dx + \left[V_1(x+dx) - V_1(x)\right]dt\right) = (\rho + d\rho)A\left[1 + \frac{\partial V_1}{\partial x}dt\right]dx$$



En identifiant ces deux masses (*conservation de la masse*), on trouve : $\rho = (\rho + d\rho)\left[1 + \frac{\partial V_1}{\partial x}dt\right]$

qui s'écrit *au premier ordre* : $d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}dt + \frac{\partial \rho}{\partial x}dx = -\rho\frac{\partial V_1}{\partial x}dt$, et donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}V = -\rho\frac{\partial V_1}{\partial x}$

ou encore, au premier ordre de la perturbation : $\boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0\frac{\partial V_1}{\partial x}}$

✓*Equation d'état thermodynamique*

Nous avons besoin maintenant d'une *troisième équation*. On utilise la *relation isentropique* (= *adiabatique* et *réversible*) *entre la pression et la masse volumique* qui s'écrit pour un fluide :

$$P = P_0 + \left[\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \left[\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right]_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \ldots$$

où les *dérivées partielles* sont des *constantes* déterminées pour la compression ou la dilatation adiabatique du fluide autour de la position d'équilibre.

Si les perturbations sont *faibles*, seul le terme en $(\rho-\rho_0)$ limité à l'ordre 1, doit être retenu :

$$p_1 = \left[\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]_{\rho_0} \rho_1$$

On peut exprimer le *coefficient de proportionnalité* entre la pression et la masse volumique différemment , en introduisant le *coefficient de compressibilité adiabatique* :

$$\chi_S = -\frac{1}{\mathscr{V}}\left[\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial P}\right]_S$$

où $\mathscr{V}$ est le *volume occupé par la quantité de fluide considérée*. Si on veut l'exprimer en fonction de la masse volumique, on introduit $m = \rho \mathscr{V}$, ce qui conduit à:

$$\chi_S = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \rho}{\partial P}\right]_S$$

et donc : $p_1 = \dfrac{1}{\rho_0 \chi_S} \rho_1$ ou encore : $\boxed{p_1 = c_0^2 \rho_1}$ avec : $\boxed{c_0{}^2 = \dfrac{1}{\rho_0 \chi_S}}$

✓ *Variations de la température.*

❑ *Cas du gaz parfait*

L'*équation d'état des gaz parfaits* s'écrit classiquement $P\mathscr{V} = nRT$. Dans cette expression, $\mathscr{V}$ représente le *volume occupé par le gaz*, T la *température thermodynamique*, R la *constante des gaz parfaits* (R = 8.314J/K) et n le *nombre de moles de gaz*.

Si l'on préfère raisonner en masse volumique, on utilise la relation : $m = nM = \rho\mathscr{V}$

où M est la *masse molaire du gaz*, et la relation d'état devient : $\dfrac{P}{\rho} = \dfrac{RT}{M}$

En différentiant, on obtient : $\boxed{\dfrac{dP}{P} + \dfrac{d\mathscr{V}}{\mathscr{V}} = \dfrac{dT}{T}}$

L'équation décrivant une *transformation adiabatique* s'écrivant : $PV^{\gamma} = cste$

on obtient par différentiation : $\boxed{\dfrac{dP}{P} + \gamma\dfrac{d\mathscr{V}}{\mathscr{V}} = 0}$

En combinant les deux relations, on trouve donc : $\boxed{\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right)\dfrac{dP}{P} = \dfrac{dT}{T}}$

d'où, *en intégrant* : $\left(\dfrac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \dfrac{T}{T_0}$

et *en développant la température* ($T=T_0+T_1$) *et la pression* ($P=P_0+p_1$) *au premier ordre* :

$$\boxed{T_1 = \frac{T_0}{P_0}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma}\right]p_1}$$

On obtient également *l'expression du coefficient de compressibilité adiabatique* :

$$\boxed{\chi_S = -\frac{1}{\mathscr{V}}\left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\gamma P_0}}$$

❑ *Cas du liquide*

Dans un liquide, on exprime *l'apport de chaleur à une quantité m de liquide* sous la forme :

$$\delta Q = C_P dT + h dP$$

où C_p est la *capacité calorifique du liquide* et avec : $h = -T\left[\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial T}\right]_P$

En introduisant le *coefficient de dilatation volumique* $\alpha = \frac{1}{\mathscr{V}}\left[\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial T}\right]_P$

nous obtenons : $\delta Q = C_p dT - \alpha T \mathscr{V} dP = C_p dT - \alpha T \frac{m}{\rho} dP$

Comme le phénomène est *adiabatique* $\delta Q = 0$ et nous obtenons, *après intégration, au premier ordre* :

$$\boxed{T_1 = \frac{\alpha T_0}{\rho_0 c_p} p_1}$$

où $c_p = C_p/m$ est la *chaleur spécifique du liquide* (capacité calorifique par unité de masse).

2.2.4 Equations de propagation unidimensionnelle

Remarque :

à partir de ce paragraphe, on ne considère comme variables *que les grandeurs acoustiques*. Dans un souci d'alléger l'écriture, *on sous-entend l'indice 1 qui affecte ces grandeurs*.

2.2.4.a Equations de propagation exprimées en pression, en vitesse et en densité

On dérive l'équation de conservation de la quantité de mouvement par rapport à x :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

On dérive l'équation de conservation de la masse par rapport à t :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

En combinant les deux relations, on obtient l'*équation de propagation unidimensionnelle pour la pression* :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Box p = 0}$$

De la même manière, si l'on dérive l'équation de conservation de la quantité de mouvement par rapport à t, on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Et en dérivant l'équation de la conservation de la masse par rapport à x:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x}$$

En combinant ces deux dernières relations, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \text{ ou } \Box V=0}$$

Enfin, dans la mesure où ρ est proportionnelle à p, on a aussi : $\boxed{\Box \rho = 0}$

2.2.4.b Expression en fonction du potentiel des vitesses

Lorsque le champ de vitesses du fluide vérifie $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$ (fluide irrotationnel), on peut introduire un potentiel des vitesses φ tel que :

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi$$

On vérifie aisément que c'est le cas pour la vitesse associée à la propagation unidimensionnelle. On peut indiquer dès maintenant que cette condition d'irrotationalité est vérifiée pour toute propagation dans un fluide non visqueux.

Dans ces conditions, l'équation de conservation de la quantité de mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0$$

En intégrant, on obtient :

$$p + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{cste}$$

Cette constante peut être prise nulle, car elle l'est en l'absence d'onde.

On peut donc obtenir toutes les grandeurs acoustiques à partir du potentiel :

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi \quad , \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad , \quad \rho = -\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Si on reprend l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial V}{\partial x}$$

on obtient :

$$\boxed{-\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{ou } \square\varphi = 0}$$

On constate que *toutes les grandeurs pouvant représenter l'onde vérifient la même équation*, l'*équation générale des ondes*.

Du point de vue pratique, dans la plupart des cas, on cherche les solutions sous forme de potentiel duquel on peut dériver les autres grandeurs.

2.2.5 Solutions de l'équation de propagation unidimensionnelle

✓ *Ondes planes progressives*

On peut vérifier que pour toute fonction f (deux fois dérivable), le potentiel :

$$\boxed{\varphi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c_0}\right)}$$

est une *solution de l'équation de propagation*. En effet :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} f'\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \text{ donc } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = +\frac{1}{c_0^2} f''\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$$

et de la même manière :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f'\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \text{ donc } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f''\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$$

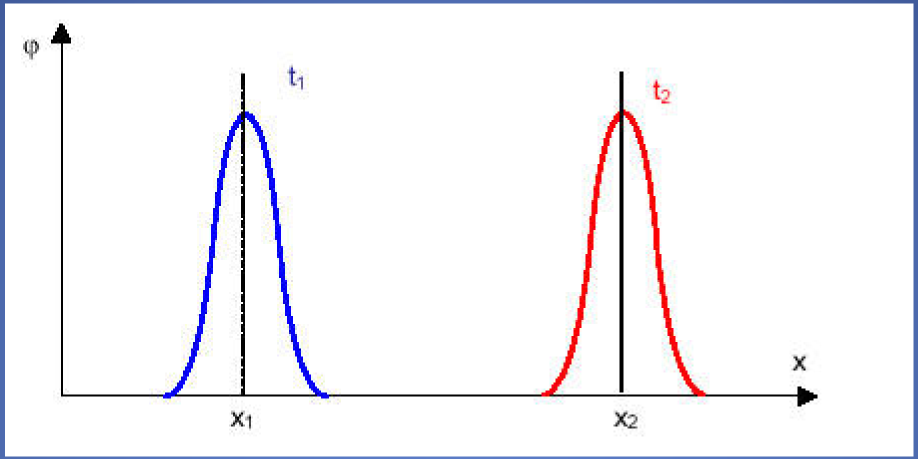
On peut montrer de la même manière que pour toute fonction g (deux fois dérivable), le potentiel :

$$\boxed{\varphi(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c_0}\right)}$$

est *aussi solution de l'équation de propagation*.

La solution : $\varphi(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{c_0}\right)$

représente une onde progressive dans le sens des x croissant. Ceci s'illustre bien en traçant sur un schéma le potentiel pour deux instants t_1 et t_2 :



Comme :

$$\varphi(x,t_2) = f\left(t_2 - \frac{x}{c_0}\right) = f\left(t_1 + t_2 - t_1 - \frac{x}{c_0}\right) = f\left(t_1 - \frac{x - c_0(t_2 - t_1)}{c_0}\right) = \varphi\left(\frac{x - c_0(t_2 - t_1)}{c_0}, t_1\right)$$

Le potentiel calculé en x_2 à l'instant t_2 est le même que le potentiel calculé à l'instant t_1 en x_1 si ces variables sont liées par l'équation : $x_2 - x_1 = c_0(t_2 - t_1)$

qui traduit le fait que l'onde se propage à la vitesse c_0 (qui porte aussi le nom de célérité).

De même, la solution $\varphi(x,t) = g\left(t + \dfrac{x}{c_0}\right)$ représente une onde progressive dans le sens des x décroissant.

Bien sûr, la combinaison des deux types d'onde sera aussi une solution de l'équation de propagation.

✓ *Célérité*

La *vitesse de propagation* de ces ondes acoustiques est donc : $\boxed{c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}}$

Dans le cas d'un gaz parfait, $\chi_S = \dfrac{1}{\gamma P_0}$ donc $c_0^2 = \dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}$

En utilisant l'équation d'état : $\dfrac{P_0}{\rho_0} = \dfrac{RT_0}{M}$

on trouve finalement : $\boxed{c_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}}$

Par exemple, si on considère l'air comme un gaz parfait de masse molaire M = 28,95.10^{-3} kg, à la pression atmosphérique et à 20°C, c_0 =344 m/s (*remarque* : γ=1,4 pour les gaz diatomiques comme O_2 et N_2 et R=8,314J.mol^{-1}.K^{-1}. Il apparaît clairement que la célérité varie avec la température.

$\gamma=c_p/c_v$	Type de gaz
1,66	monoatomiques
1,4	diatomiques
1,33	triatomiques
1	pluriatomiques

✓ Notion d'impédance

On peut déduire de l'expression du potentiel celles de la pression et de la vitesse.
Pour les *ondes se propageant selon les x croissants* :

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho_0 f'\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$$

$$V = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} f'\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$$

On voit que :

$$\boxed{p = \rho_0 c_0 V = Z_c V}$$

où on a noté Z_c le *rapport p/V* ; dans le cas de l'onde plane progressive choisie, ce rapport vaut $Z_c = \rho_o c_o$; c'est une grandeur qui *ne dépend que des caractéristiques du milieu*. Z_c est appelée *impédance caractéristique du milieu*.

Un calcul analogue pour *l'onde se propageant en sens inverse* donne :

$$p = -\rho_0 g'\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$$

$$V = \frac{1}{c_0} g'\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$$

Donc :

$$\boxed{p = -Z_c V}$$

Ceci montre clairement que *l'impédance dépend du milieu mais aussi du type d'onde*.

Ceci apparaît manifestement lorsqu'on considère la *superposition de deux ondes se propageant en sens opposés* :

$$\frac{p}{V}=\frac{-\rho_0 f'\left(t-\frac{x}{c_0}\right)-\rho_0 g'\left(t+\frac{x}{c_0}\right)}{-\frac{1}{c_0}f'\left(t-\frac{x}{c_0}\right)+\frac{1}{c_0}g'\left(t+\frac{x}{c_0}\right)}=\rho_0 c_0\frac{f'\left(t-\frac{x}{c_0}\right)+g'\left(t+\frac{x}{c_0}\right)}{f'\left(t-\frac{x}{c_0}\right)-g'\left(t+\frac{x}{c_0}\right)}$$

Il n'y a *plus de relation simple entre p et V*.

L'ordre de grandeur de l'impédance caractéristique dépend du milieu, dans l'air à 20°C : Z_c =440 Rayl.

✓ Ondes planes harmoniques

On cherche une *solution de l'équation de propagation* dont la *dépendance temporelle* est *harmonique*.

Elle est donc de la forme : $\varphi(x,t) = A(x)e^{i\omega t}$

En injectant cette solution dans l'équation de propagation, on obtient l'équation différentielle du second ordre :

$$A''(x) + \frac{\omega^2}{c_0^2} A(x) = 0$$

En introduisant le nombre d'onde $k = \dfrac{\omega}{c_0}$ cette équation s'écrit : $A''(x) + k^2 A(x) = 0$

C'est l'équation d'un *oscillateur harmonique*, dont les *solutions* sont : $A(x) = Ae^{-ikx} + Be^{+ikx}$

Le *potentiel des vitesses* s'écrit alors : $\varphi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}$

Si l'on s'intéresse uniquement à l'*onde plane progressive vers les x croissants*, le *potentiel des vitesses* devient :

$$\varphi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

La *vitesse particulaire* vaut :

$$V = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -ikAe^{i(\omega t - kx)} = V_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

et la *pression acoustique* :

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\rho_0 \omega A e^{i(\omega t - kx)} = p_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

p_0 et V_0 sont *appelées amplitudes de la pression et de la vitesse*.

On trouve bien sûr la même relation entre pression et vitesse : $p = \rho_o c_o V$.

Remarque : il ne faut pas oublier que lorsqu'on utilise les nombres complexes pour représenter les grandeurs, *seule la partie réelle a un sens physique*. Par ailleurs, l'utilisation des complexes n'est possible que lorsqu'on traite des expressions linéaires.

2.2.6 Généralisation tridimensionnelle

L'idée est de *généraliser la description réalisée dans le cadre unidimensionnel*. On se place alors dans le cadre de la *mécanique des milieux continus*. On suppose qu'*en l'absence d'onde*, le *fluide* est dans un *état d'équilibre thermodynamique* caractérisé par (P_0, ρ_0, T_0).

2.2.7 Equations de propagation tridimensionnelles

On part des *équations de conservation* :

✓*Conservation de la masse* (*équation de continuité*):

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{V}) = 0}$$

✓*Conservation de la quantité de mouvement* (*équation de Navier-Stokes*) :

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} \right) = \vec{f} + \vec{\nabla}.\overline{\overline{\tau}}}$$

où $\vec{f}$ désigne la *densité volumique de forces* et $\overline{\overline{\tau}}$ désigne le *tenseur des contraintes d'ordre 2* permettant de calculer la *force superficielle* s'exerçant en un point P du fluide, sur un *élément de surface* $\overrightarrow{d\sigma}$

Par définition, la *force par unité de surface* $\vec{t}$ est telle que : $\overline{\overline{\tau}}.\overrightarrow{d\sigma} = \vec{t}\,d\sigma$

Si *on néglige la viscosité du fluide*, le *tenseur d'ordre 2* permettant de calculer les forces superficielles est *proportionnel à l'identité* :

$$\overline{\overline{t}} = -p\,\overline{\overline{1}}$$

et l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right) = \vec{f} - \vec{\nabla} p$$

Si on peut en plus *négliger les forces volumiques*, on obtient finalement :

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right) = -\vec{\nabla} p}$$

Le *développement au premier ordre* des différentes grandeurs s'écrit :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad , \quad P = P_0 + p_1 \quad , \quad \vec{V} = \vec{0} + \vec{V}_1$$

En injectant ces développements dans les deux équations précédentes, on obtient *au premier ordre* :

$$\boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla}.\vec{V}_1 = 0}$$

et :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \vec{\nabla} p_1 = 0}$$

La *relation* introduite *entre pression et masse volumique* précédemment reste valable :

$$\boxed{p_1 = c_0^2 \rho_1}$$

En *combinant* ces trois équations, et *en omettant les indices 1*, on obtient :

$$\rho_0 \frac{\partial(\vec{\nabla}.\vec{V})}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\rho_0 \vec{\nabla}.\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right) = -\Delta p$$

d'où :

$$\boxed{\Delta p - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou encore } \Box p = 0}$$

où l'on a utilisé le *laplacien tridimensionnel* :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et le *d'Alembertien tridimensionnel* :

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Bien sûr, on a aussi :

$$\boxed{\Box \rho = 0}$$

A partir des équations de conservation, on écrit aussi :

$$c_0^2 \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = -c_0^2 \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{V}\right) = -c_0^2\left(\Delta\vec{V} - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right) = -c_0^2 \Delta \vec{V} \quad \text{car } \vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{0}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} p\right) = -\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2}$$

d'où :

$$\boxed{\Delta\vec{V} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} \quad \text{ou } \Box \vec{V} = \vec{0}}$$

On peut également raisonner avec le *potentiel de vitesse*, en remplaçant dans l'équation de propagation :

$$\Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}\right)=0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\varphi-\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\right)=0$$

En intégrant, on tire :

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=\text{cste}$$

Et cette constante doit être nulle car cette relation reste valable en l'absence d'onde, par conséquent :

$$\boxed{\Box\varphi=0}$$

2.2.8 Solutions de l'équation de propagation tridimensionnelle

Comme dans le cas unidimensionnel, on a tendance à utiliser le potentiel. On peut vérifier qu'un potentiel de la forme:

$$\boxed{\varphi(\vec{r},t) = f\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right)}$$

où *f est une fonction deux fois dérivable* et $\vec{n}$ u*n vecteur unitaire*, est *solution de l'équation de la propagation* ; en effet, on a par exemple :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} n_x f'\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} n_x^2 f''\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right)$$

d'où :

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c_0^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) f''\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right) = \frac{1}{c_0^2} f''\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right)$$

et on a bien sûr toujours :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f''\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right)$$

Cette solution correspond à une *onde plane se propageant dans la direction* $\vec{n}$.

La propagation unidimensionnelle est un cas particulier où $\vec{n} = \pm\vec{1}_x$

Le plan d'onde est le plan orthogonal à $\vec{n}$ dans lequel φ est uniforme.

On en déduit la *vitesse* :
$$\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi = -\frac{\vec{n}}{c_0} f'\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right)$$

et la *pression* :
$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho_0 f'\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right)$$

On constate que $\vec{V} \,//\, \vec{n}$, d'où le nom d'*onde longitudinale* donnée aux ondes se propageant dans les fluides.

La *relation entre pression et vitesse* se met sous les formes :
$$p = \rho_0 c_0 \vec{V}.\vec{n} \quad \text{ou encore } \vec{V} = \frac{p}{\rho_0 c_0}\vec{n}$$

Les *solutions harmoniques* s'obtiennent en choisissant une fonction f du type :
$$f(y) = Ae^{i\omega y}$$

d'où :
$$\boxed{\varphi(\vec{r},t) = Ae^{i\omega\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{n}}{c_0}\right)} = Ae^{i\omega\left(t - \vec{k}.\vec{r}\right)} \quad \text{où } \vec{k}. = \frac{\omega}{c_0}\vec{n} \quad \text{est appelé vecteur d'onde}}$$

2.2.9 Considérations énergétiques

✓ *Energie volumique et vecteur de Poynting*

Lorsque l'onde est présente, le fluide emmagasine de l'énergie acoustique sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. On peut trouver leurs expressions en reprenant le cas unidimensionnel en les calculant pour la tranche comprise entre x et x+dx :

Son *énergie cinétique* vaut :

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \rho_0 A dx V^2$$

d'où *une densité volumique d'énergie cinétique* u_{cin} égale à :

$$\boxed{u_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \rho_0 V^2}$$

Son *énergie potentielle* vaut :

$$E_P = \int_{\text{tranche}} -p d\mathscr{V} = \int_{P_0}^{P_0+p} -p \left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial p} \right)_S dp = \int_0^p -p \left(\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial p} \right)_S dp = \int_0^p \mathscr{V} p \chi_S dp = \chi_S \mathscr{V} \frac{p^2}{2}$$

d'où une *densité volumique d'énergie potentielle* u_{pot} égale à :

$$\boxed{u_{\text{pot}} = \chi_S \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{2 \rho_0 c_0^2}}$$

En reprenant l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on peut écrire :

$$\rho_0 \vec{V}.\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\nabla} p = 0$$

D'autre part, comme :

$$\vec{\nabla}.(p\vec{V}) = p\vec{\nabla}.\vec{V} + \vec{V}.\vec{\nabla} p$$

on obtient, en utilisant la conservation de la masse linéarisée :

$$\vec{V}.\vec{\nabla} p = \vec{\nabla}.(p\vec{V}) - p\vec{\nabla}.\vec{V} = \vec{\nabla}.(p\vec{V}) + \frac{p}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla}.(p\vec{V}) + \frac{p}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}$$

En regroupant, on a donc :

$$\rho_0 \vec{V}.\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{p}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t} = \vec{\nabla}.(-p\vec{V})$$

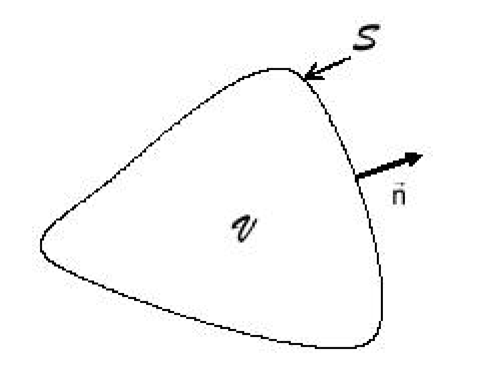
Cette équation n’est rien d'autre qu'une *écriture de la conservation de l'énergie*. En effet, cette équation s'écrit :

$$\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left\|\vec{V}\right\|^2+\frac{p^2}{\rho_0^2 c_0^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}=\vec{\nabla}.\vec{\Pi}$$

où *$u=u_{cin}+u_{pot}$ est la densité volumique totale d’énergie* et où l’on a noté :

$$\vec{\Pi}=-p\vec{V}$$

Ce vecteur est appelé *vecteur de Poynting* (par analogie avec l'électromagnétisme).



L'*énergie acoustique contenue dans un volume* $\mathcal{V}$ fixe vaut :

$$E=\int_{\mathcal{V}} u\,d\tau$$

Sa variation au cours du temps est décrite par :

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathcal{V}} u\,d\tau\right)=\int_{\mathcal{V}}\frac{\partial u}{\partial t}d\tau=\int_{\mathcal{V}}\vec{\nabla}.\vec{\Pi}\,d\tau=\int_{\mathcal{S}}\vec{\Pi}.\overrightarrow{d\mathcal{S}}$$

Ceci s'interprète comme la *variation d'énergie contenue dans le volume V* est égale au *flux du vecteur de Poynting au travers de la surface* $\mathcal{S}$. Le terme $d\mathcal{P}=\vec{\Pi}.\overrightarrow{d\mathcal{S}}$ correspond donc à la *puissance de l'onde passant à travers la surface* $\overrightarrow{d\mathcal{S}}$

Attention aux orientations des surfaces, alors que $\overrightarrow{d\mathcal{S}}$ est orientée vers l'extérieur du volume, $\vec{\Pi}.\overrightarrow{d\mathcal{S}}$ traduit la *puissance entrant dans le volume*.

Calculons la *densité d'énergie acoustique* pour l'*onde plane harmonique progressive*, caractérisée par :

$$\varphi(\vec{r},t) = A\cos\omega\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{n}}{c_0}\right)$$

$$p(\vec{r},t) = A\omega\rho_0 \sin\omega\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{n}}{c_0}\right) = p_m \sin\omega\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{n}}{c_0}\right)$$

$$\vec{V}(\vec{r},t) = \frac{p(\vec{r},t)}{c_0\rho_0}\vec{n} = \frac{p_m}{c_0\rho_0}\vec{n}\sin\omega\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{n}}{c_0}\right) = V_m\vec{n}\sin\omega\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{n}}{c_0}\right)$$

l'*énergie acoustique E(t) dans un volume $\mathscr{V}$* vaut :

$$E(t) = \frac{\rho_0\mathscr{V}}{2}\left[\left\|\vec{V}\right\|^2(t) + \frac{p^2(t)}{\rho_0^2 c_0^2}\right]$$

La *densité volumique d'énergie u(t)* vaut donc :

$$u(t) = \frac{E(t)}{\mathscr{V}} = \frac{\rho_0}{2}\left[\left\|\vec{V}\right\|^2(t) + \frac{p^2(t)}{\rho_0^2 c_0^2}\right] = \frac{\rho_0}{2}2\left\|\vec{V}\right\|^2(t)$$

Et sa *valeur moyenne* :

$$\boxed{\langle u\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{\rho_0}{2T}\int_0^T 2\left(V_m \sin\omega t\right)^2 = \frac{\rho_0 V_m^2}{2} = \rho_0 V_{\text{eff}}^2}$$

✓ Intensité acoustique

L'*intensité acoustique* est une grandeur définie pour une onde plane progressive. C'est la *valeur moyenne temporelle de la puissance rayonnée par unité de surface à travers une surface orthogonale à la direction de propagation*, soit en notant < > l'opérateur de moyennage temporel sur une période T de l'onde :

$$I = \left\langle \vec{\Pi}.(-\vec{n}) \right\rangle = \left\langle p\vec{V}.\vec{n} \right\rangle$$

Cette valeur moyenne est éventuellement variable au cours du temps car son expression complète est de la forme :

$$I(t_1) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} pV dt$$

Son *unité* est le *W/m²*.

En rappelant la notion de valeur efficace de la pression : $p_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} p^2 dt$

et en utilisant la relation entre pression et vitesse acoustique ($p=Z_cV$), on trouve :

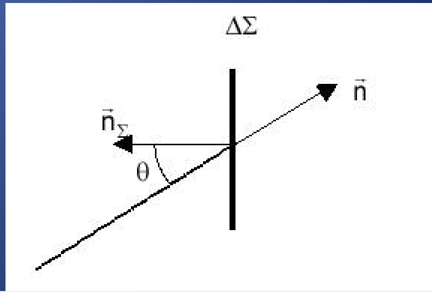
$$I = Z_c V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{Z_c} p_{\text{eff}}^2$$

Dans le cas de l'onde harmonique, on trouve :

$$\boxed{p_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} p_m^2 \quad \text{donc} \quad I = \frac{1}{2}\rho_0 c_0 V_m^2 = \frac{p_m^2}{2\rho_0 c_0}}$$

Si l'on cherche à évaluer la puissance moyenne rayonnée à travers une surface orientée de manière quelconque par rapport à la direction de propagation, il faut prendre en compte l'angle qu'elles font :

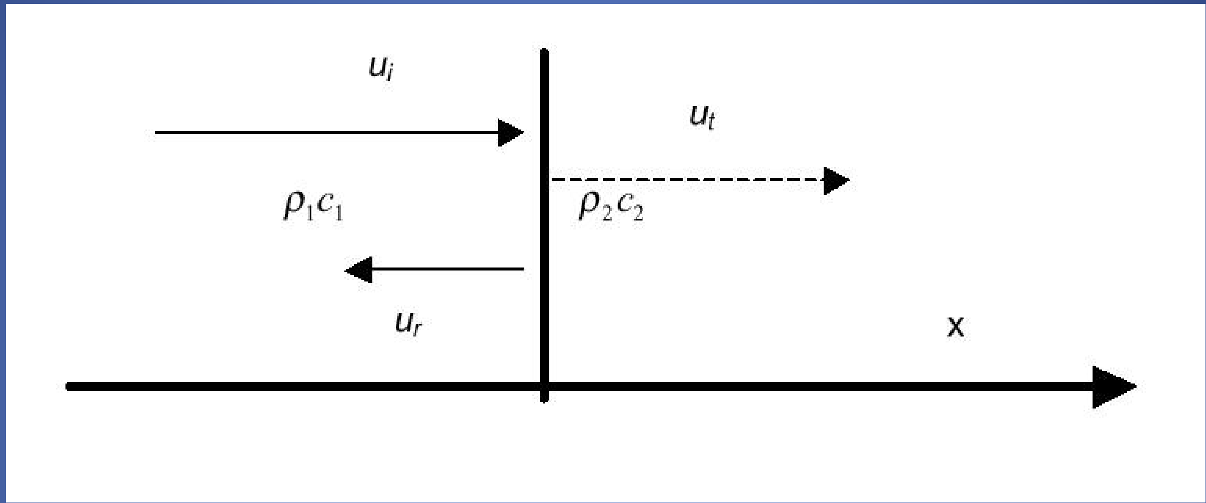
$$\Delta\mathcal{P} = \left\langle \vec{\Pi}.\Delta\vec{\Sigma} \right\rangle = \left\langle pV\cos\theta\Delta\Sigma \right\rangle = I\cos\theta\Delta\Sigma$$



2.2.10 Réflexion et réfraction des ondes planes

✓ *Réflexion d'une onde plane sous incidence normale*

Supposons, comme représenté sur la figure, qu'une onde plane se propageant dans un milieu d'impédance $\rho_1 c_1$ rencontre un dioptre avec un milieu d'impédance $\rho_2 c_2$ sous une incidence normale.



La *pression de l'onde incidente* est : $p_i = A_i e^{i(\omega t - k_1 x)}$

La *pression de l'onde réfléchie* est : $p_r = A_r e^{i(\omega t + k_1 x)}$

La *pression de l'onde transmise* est : $p_t = A_t e^{i(\omega t - k_2 x)}$

La pression doit être la même de part et d'autre du dioptre en x = 0 (*condition de continuité*) :

$$p_i + p_r = p_t$$

Cette relation implique aussi une *relation de continuité pour la vitesse* : $V_i + V_r = V_t$

Introduisons les *impédances* : $p_i = Z_1 V_i \quad , \quad p_r = -Z_1 V_r \quad , \quad p_t = Z_2 V_t$

On trouve : $Z_1 V_i - Z_1 V_r = Z_2 V_t = Z_2 \left(V_i + V_r \right)$

On est amené à définir des *coefficients de réflexion et de transmission de vitesse* :

$$R_V = \frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_V = \frac{V_t}{V_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

On introduit de la même manière des *coefficients pour la réflexion et la transmission en pression* :

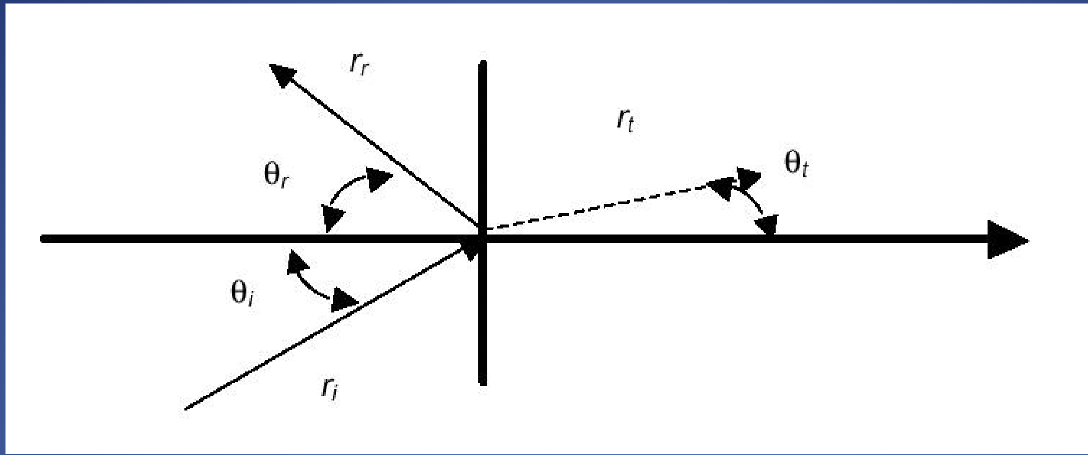
$$R_p = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_p = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

L'intensité étant le produit de la pression et de la vitesse, les *coefficients de réflexion et de transmission en intensité* valent :

$$\boxed{\rho = \frac{I_r}{I_i} = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right]^2 = \left[\frac{\left(\rho_1 \mathrm{c}_1 - \rho_2 \mathrm{c}_2 \right)}{\left(\rho_1 \mathrm{c}_1 + \rho_2 \mathrm{c}_2 \right)} \right]^2 \quad \text{et} \quad \tau = \frac{I_t}{I_i} = \left[\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right]^2 = \frac{4 \rho_1 \mathrm{c}_1 \rho_2 \mathrm{c}_2}{\left(\rho_1 \mathrm{c}_1 + \rho_2 \mathrm{c}_2 \right)^2}}$$

On notera donc que *l'énergie réfléchie à l'interface entre deux milieux est d'autant plus grande que les impédances sont différentes*.

✓ *Réflexion d'une onde plane sous incidence oblique*



Les pressions des ondes planes incidente, réfléchie et transmise valent :

$$p_i(\vec{r},t) = A_i \omega \rho_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega \vec{r}.\vec{n_i}}{c_1}\right)} = p_{i\,m} e^{i\left(\omega t - k_1 \vec{r}.\vec{n_i}\right)} = p_{i\,m} e^{i\left(\omega t - \vec{k_1}\,\vec{r}\right)}$$

$$p_r(\vec{r},t) = A_r \omega \rho_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega \vec{r}.\vec{n_r}}{c_1}\right)} = p_{\mathrm{r}\,m} e^{i\left(\omega t - k_1 \vec{r}.\vec{n_r}\right)} = p_{\mathrm{r}\,m} e^{i\left(\omega t - \vec{k_1}\,\vec{r}\right)}$$

$$p_t(\vec{r},t) = A_t \omega \rho_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega \vec{r}.\vec{n_t}}{c_2}\right)} = p_{\mathrm{t}\,m} e^{i\left(\omega t - k_2 \vec{r}.\vec{n_t}\right)} = p_{\mathrm{t}\,m} e^{i\left(\omega t - \vec{k_2}.\vec{r}\right)}$$

La pression acoustique doit être continue sur l’interface, donc pour toute valeur de y, en x=0, on doit avoir :

$$p_{im} e^{-i(k_1 \sin\theta_i y + k_1 \cos\theta_i x)} + p_{rm} e^{-i(k_1 \sin\theta_r y - k_1 \cos\theta_r x)} = p_{tm} e^{-i(k_2 \sin\theta_t y + k_2 \cos\theta_t x)}$$

C'est-à-dire :

$$p_{im}e^{-i(k_1 \sin\theta_i y)} + p_{rm}e^{-i(k_1 \sin\theta_r y)} = p_{tm}e^{-i(k_2 \sin\theta_t y)}$$

Cette relation doit être vérifiée pour toutes les valeurs de la coordonnée y ; la seule manière de réaliser cette condition est que l'on ait :

$$\boxed{\begin{gathered}\theta_i = \theta_r \\ k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t\end{gathered}}$$

On retrouve donc les *mêmes lois qu'en optique géométrique* (*égalité des angles de réflexion et d'incidence et loi de Snell-Descartes*).

La dernière formule peut se mettre sous la forme : $\frac{1}{c_1}\sin\theta_i = \frac{1}{c_2}\sin\theta_t$

La continuité de la pression se réduit alors à :

$$p_{im} + p_{rm} = p_{tm} \qquad \text{ou encore } R_p + T_p = 1$$

Les vitesses particulaires des différentes ondes s'écrivent :

$$\overrightarrow{V_i}(\vec{r},t) = \frac{p_{i\,m}}{c_1}\vec{n}_i e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{r}.\vec{n}_i}{c_1}\right)} = \frac{p_{i\,m}}{c_1}\vec{n}_i e^{i\left(\omega t-\overrightarrow{k1}.\vec{r}\right)}$$

$$\overrightarrow{V_r}(\vec{r},t) = \frac{p_{r\,m}}{c_1}\vec{n}_r e^{i\left(\omega t-\overrightarrow{k_1}.\vec{r}\right)}$$

$$\overrightarrow{V_t}(\vec{r},t) = \frac{p_{t\,m}}{c_2}\vec{n}_t e^{i\left(\omega t-\overrightarrow{k_2}.\vec{r}\right)}$$

Elles doivent aussi être continues sur l'interface, donc :

$$\frac{p_{im}}{c_1}\overrightarrow{n_i}e^{-ik_1\sin\theta_i y}+\frac{p_{rm}}{c_1}\overrightarrow{n_r}e^{-ik_1\sin\theta_r y}=\frac{p_{tm}}{c_2}\overrightarrow{n_t}e^{-ik_2\sin\theta_t y}$$

C'est-à-dire, sur la composante x :

$$\frac{p_{im}}{c_1}\cos\theta_i e^{-ik_1\sin\theta_i}-\frac{p_{rm}}{c_1}\cos\theta_r e^{-ik_1\sin\theta_r}=\frac{p_{tm}}{c_2}\cos\theta_t e^{-ik_2\sin\theta_t}$$

Et sur la composante y :

$$\frac{p_{im}}{c_1}\sin\theta_i e^{-ik_1\sin\theta_i}+\frac{p_{rm}}{c_1}\sin\theta_r e^{-ik_1\sin\theta_r}=\frac{p_{tm}}{c_2}\sin\theta_t e^{-ik_2\sin\theta_t}$$

La continuité de la composante y de la vitesse est automatiquement vérifiée grâce à la loi de Snell-Descartes. La continuité de la composante x de la vitesse impose une relation supplémentaire :

$$\left(\frac{p_{im}}{c_1}-\frac{p_{rm}}{c_1}\right)\cos\theta_i=\frac{p_{tm}}{c_2}\cos\theta_t$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\left(1-\frac{p_{rm}}{p_{im}}\right)\cos\theta_i=\frac{c_1}{c_2}\frac{p_{tm}}{p_{im}}\cos\theta_t=\frac{Z_1}{Z_2}\frac{p_{tm}}{p_{im}}\cos\theta_t$$

En introduisant les coefficients de réflexion et de transmission en pression, on a donc la relation :

$$\left(1-R_p\right)\cos\theta_i=\frac{Z_1}{Z_2}T_p\cos\theta_t$$

ou encore :

$$\left(1-R_p\right)=\alpha T_p \quad \text{avec} \quad \alpha=\frac{Z_1}{Z_2}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

Des deux relations :

$$R_p + T_p = 1$$
$$\left(1 - R_p\right) = \alpha T_p$$

on tire les valeurs :

$$\boxed{\begin{aligned} R_p &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{Z_2\cos\theta_i - Z_1\cos\theta_t}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t} \\ T_p &= \frac{2\alpha}{1+\alpha} = \frac{2Z_1\cos\theta_t}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t} \end{aligned}}$$

De la même manière, puisque les composantes x de la vitesse sont reliées aux pressions par les relations :

$$V_{im} = \frac{\cos\theta_i}{Z_1} p_{im}$$
$$V_{rm} = -\frac{\cos\theta_i}{Z_1} p_{rm}$$
$$V_{tm} = \frac{\cos\theta_t}{Z_2} p_{tm}$$

en terme d'amplitudes des vitesses, la relation de continuité de la pression s'écrit :

$$\frac{Z_1}{\cos\theta_i}\left(V_{im} - V_{rm}\right) = \frac{Z_2}{\cos\theta_t} V_{tm}$$

et la relation de continuité de la composante x de la vitesse :

$$\left(V_{im} + V_{rm}\right) = V_{tm}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission en vitesse sont solutions des équations :

$$R_V + T_V = 1$$

$$\frac{Z_1}{\cos\theta_i}\left(1 - R_V\right) = \frac{Z_2}{\cos\theta_t} T_V$$

ou encore :

$$R_V + T_V = 1$$

$$\left(1 - R_V\right) = \beta T_V \quad \text{avec } \beta = \frac{Z_2}{Z_1}\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}$$

Ils valent donc :

$$R_V = \frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{Z_1\cos\theta_t - Z_2\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t}$$

$$T_V = \frac{2\beta}{1+\beta} = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t}$$

Comme l'intensité est la valeur moyenne du produit de la pression et de la vitesse particulaire, les *coefficients de transmission et de réflexion en intensité* valent donc :

$$\boxed{\begin{aligned}\rho &= \left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right]\left[\frac{1-\beta}{1+\beta}\right] = \left[\frac{Z_2\cos\theta_i - Z_1\cos\theta_t}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t}\right]^2 \\ \tau &= \left[\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right]\left[\frac{2\beta}{1+\beta}\right] = \frac{4Z_1Z_2\cos\theta_i\cos\theta_t}{\left(Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t\right)^2}\end{aligned}}$$

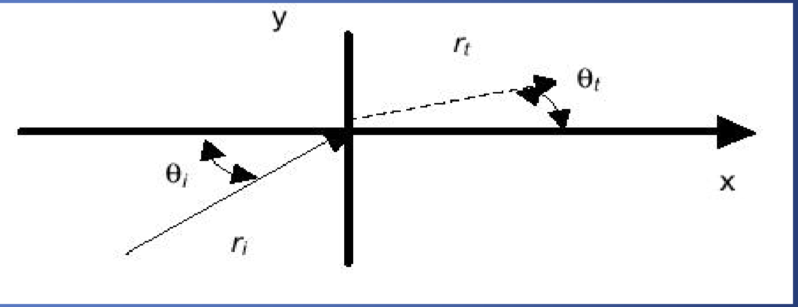
En appliquant la loi de Snell-Descartes, on peut exprimer différemment le coefficient α :

$$\alpha = \frac{Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i} = \frac{Z_1}{Z_2}\frac{\sqrt{\left(1-\sin^2\theta_t\right)}}{\cos\theta_i} = \frac{Z_1}{Z_2}\frac{\sqrt{\left(1-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\sin^2\theta_i\right)}}{\cos\theta_i}$$

On voit que dans le cas où l'on passe vers un milieu ou le son circule plus vite, il existe une *valeur critique θ_c* pour l'angle d'incidence déterminée par la formule :

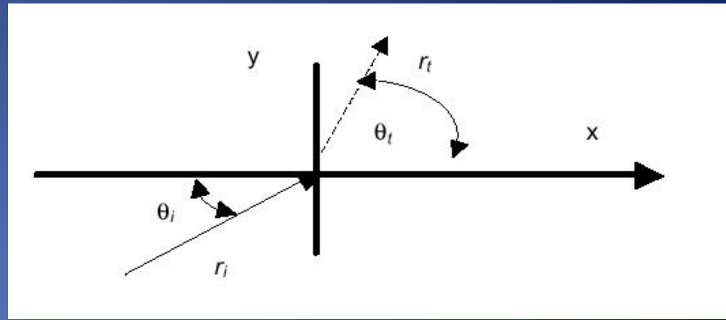
$$\sin\theta_c = \frac{c_1}{c_2}$$

✓Lorsque $c_1>c_2$ le son réfracté existe toujours , il se propage selon un angle $\theta_t< \theta_i$.



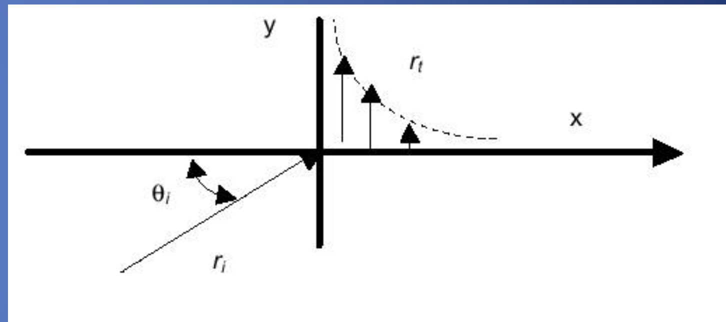
Dans le cas ou $c_1 < c_2$, deux cas sont possibles :

✓Soit $\theta_i < \theta_c$ et l'angle θ_t existe (il y a un son réfracté) mais $\theta_t > \theta_{ci}$



✓Soit $\theta_i > \theta_c$ et l'angle θ_t n'existe (pas il n'y a pas de son réfracté). En fait, l'angle θ_t est alors imaginaire et le terme :

$$e^{-ik_2 \cos\theta_t x}$$



correspond à une amplitude réelle qui décroît exponentiellement avec la distance x : l'onde transmise se propage donc dans une direction parallèle à y avec une amplitude qui décroît en x: l'onde obtenue est *évanescente*

$$p_t(\vec{r},t) = p_{tm} e^{i\omega t} e^{-i(k_2 \sin\theta_t y + k_2 \cos\theta_t x)}$$

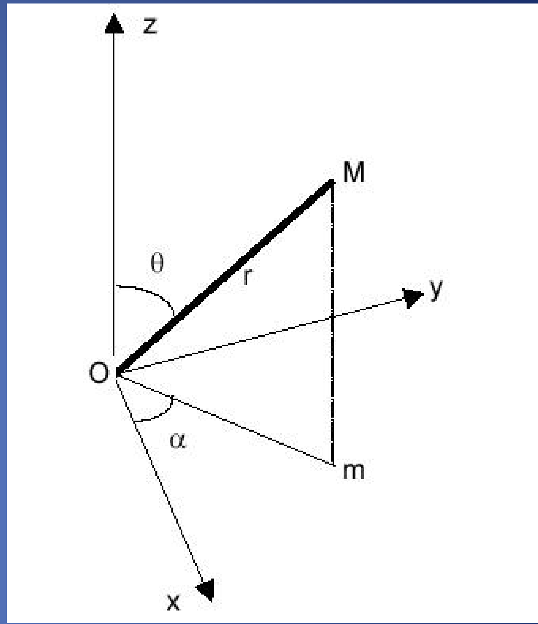
2.3 Ondes sphériques

L'idée est de rechercher des *solutions ayant d'autres configurations géométriques*.

2.3.1 Rappel sur les coordonnées sphériques

Un point M est repéré par des coordonnées (r,θ,α) ; m est la projection de M dans le plan (xOy). On passe des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$x = r\sin\theta\cos\alpha$$
$$y = r\sin\theta\sin\alpha$$
$$z = r\cos\theta$$



Le laplacien d'une fonction scalaire $f(r,\theta,\alpha)$ s'exprime :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$$

Le choix de travailler en coordonnées sphériques n'a de sens que si la description des phénomènes est simplifiée par ce choix. Il est clair que ce n'est pas vrai dans le cas général mais uniquement si l'on est en présence d'une symétrie sphérique, c'est-à-dire que toutes les grandeurs sont indépendantes de θ et de α. Ce que l'on supposera dans la suite de ce chapitre. Dans ce cas, le laplacien se simplifie en :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}$$

2.3.2 Equation de propagation

On suppose que le potentiel des vitesses ne dépend spatialement que de r : $\varphi = \varphi(r,t)$

L'équation de propagation pour le potentiel $\Delta\varphi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$ s'écrit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = 0$$

Par analogie au cas de l'onde plane, les solutions de cette équation sont données par :

$$r\varphi(r,t) = f\left(t - \frac{r}{c_0}\right) + g\left(t + \frac{r}{c_0}\right)$$

où f et g sont deux fonctions deux fois dérivables quelconques. D’où :

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c_0}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c_0}\right)$$

On remarque que pour les deux types d'onde, il y a un terme traduisant l'aspect progressif $f(t-r/c_0)$ ou $g(t + r/c_0)$. La première correspond à une onde divergente, la seconde à une onde convergente. Ce terme est modulé par le facteur 1/r qui fait que l'amplitude de l'onde varie en fonction de r contrairement à l'onde plane. La surface sur laquelle le potentiel est constant à un instant donné n'est plus un plan mais une sphère centrée sur l'origine. Le premier terme correspond à l'onde divergente car la propagation se fait selon les r croissant tandis que le deuxième terme représente une onde se propageant selon les r décroissant.

2.3.3 étude de l'onde sphérique divergente

On s'intéresse plus à l'onde divergente car celle-ci peut être représentative du rayonnement d'une source de petite taille. Dans la pratique, il est difficile de synthétiser une onde sphérique convergente.

L'onde divergente est caractérisée par un potentiel de la forme : $\varphi(r,t)=\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{c_0}\right)$

On peut en déduire la pression : $p=-\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\rho_0\frac{1}{r}f'\left(t-\frac{r}{c_0}\right)$

Le potentiel ne dépendant que de r, la vitesse se met sous la forme :

$$\vec{V}=\vec{\nabla}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{1_r}=\left[-\frac{1}{r^2}f\left(t-\frac{r}{c_0}\right)-\frac{1}{rc_0}f\left(t-\frac{r}{c_0}\right)\right]\vec{1_r}=V\vec{1_r}\quad\text{(vitesse radiale)}$$

Le comportement de la pression est semblable à celui du potentiel avec une décroissance en 1/r. En revanche, la vitesse a un comportement différent puisqu'elle comprend deux termes :

- ✓quand r est grand (champ lointain), le terme prépondérant est $V\approx-\frac{1}{rc_0}f'\left(t-\frac{r}{c_0}\right)$ et on retrouve la relation simple avec la pression $p=\rho_0 c_0 V$. Dans ce cas, l'onde sphérique peut être localement assimilée à une onde plane ;
- ✓quand r est petit, le terme prépondérant est $V\approx-\frac{1}{r^2}f\left(t-\frac{r}{c_0}\right)$; il n'y a plus de relation simple avec la pression. et on retrouve la relation simple avec la pression.

2.3.4 Onde sphérique divergente harmonique

✓ *Amplitudes*

Le choix d'une dépendance temporelle harmonique conduit à un potentiel de la forme :

$$\varphi(r,t) = -\frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

On en déduit la pression :

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_0 i\omega \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

et la vitesse :

$$V = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left[\frac{A}{r^2} + ik\frac{A}{r}\right] e^{i(\omega t - kr)} = \frac{A}{r}\left[\frac{1}{r} + ik\right] e^{i(\omega t - kr)} = \left(ik + \frac{1}{r}\right)\varphi$$

Dans le cas de l'onde harmonique, on peut préciser la notion de champ lointain en comparant r à la longueur d'onde :

✓si kr >> 1 ou r >> λ (champ lointain)

$$V(r,t) = i\omega \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

$$p(r,t) = \rho_0 i\omega \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

$$V \approx ik\varphi = \frac{p}{\rho_0 c_0}$$

et l'on retrouve la même relation que pour l'onde plane entre la pression et la vitesse que pour l'onde plane (qui sont en phase);

✓au contraire si λ<<r (champ proche)

$$V(r,t) = \frac{A}{r^2} e^{i(\omega t - kr)}$$

$$p(r,t) = \rho_0 i\omega \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

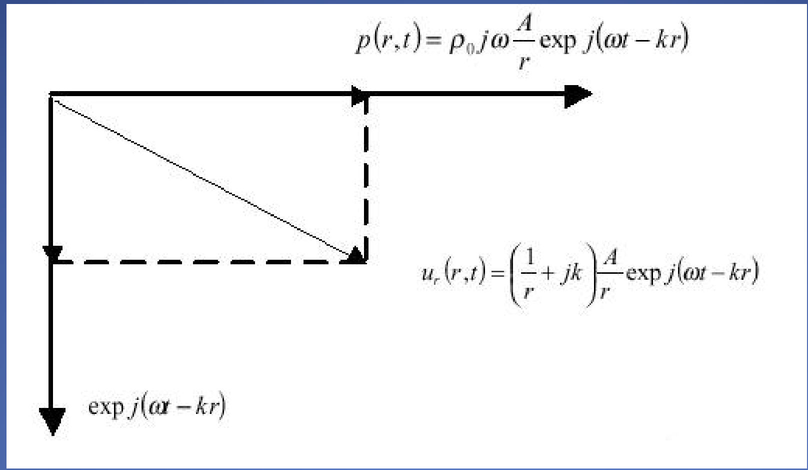
$$V \approx \frac{\varphi}{r} = \frac{1}{i\rho_0 c_0} \frac{p}{kr}$$

on constate cette fois que la vitesse et la pression sont en quadrature de phase.

✓Si aucune des conditions précédentes n'est remplie, il faut tenir compte des deux termes :

$$V = \frac{1}{i\rho_0 c_0} \frac{p}{kr} + \frac{p}{\rho_0 c_0}$$

La figure suivante permet de visualiser la phase entre le vecteur de vitesse et celui de pression :



L'amplitude de pression est donc : $|p| = \rho_0 \omega \frac{A}{r} = k \rho_0 c_0 \frac{A}{r}$ que l'on notera p_m

L'amplitude de vitesse : $|V| = \frac{A}{r^2}\sqrt{1+k^2r^2}$ que l'on notera V_m

Le déphasage entre la pression et la vitesse : $\cos\varphi = \frac{kr}{\sqrt{1+k^2r^2}}$

On a la relation : $V_m \cos\varphi = \frac{p_m}{\rho_0 c_0}$

✓*Impédance*

Par définition l'impédance est le rapport de la pression et de la vitesse :

$$Z = \frac{p}{V} = \frac{1}{\frac{1}{ikr}+1}\rho_0 c_0 = \frac{i\rho_0 c_0 kr}{1+ikr} = \rho_0 c_0 \left(\frac{k^2+r^2}{1+k^2r^2} + i\frac{kr}{1+k^2r^2} \right)$$

L'impédance acoustique est un nombre complexe somme de la résistance spécifique acoustique (partie réelle) et de la réactance spécifique acoustique (partie imaginaire).

En champ lointain, l'impédance se réduit à celle d'une onde plane progressive :

$$Z = \rho_0 c_0$$

En champ proche, l'impédance est imaginaire pure et vaut :

$$Z = i\rho_0 c_0 kr = i\omega\rho_0 r$$

Dans le cas général, en introduisant le nombre complexe :

$$Ae^{-i\alpha} = 1 + \frac{1}{ikr}$$

on a :

$$\tan\alpha = \frac{1}{kr} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad \text{et} \quad A^2 = 1 + \frac{1}{k^2r^2} = 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

On peut alors exprimer l'impédance comme :

$$Z = \frac{Z_c}{A}e^{i\alpha} = Z_c \cos\alpha e^{i\alpha}$$

où $Z_c = \rho_0 c_0$ est l'impédance d'une onde plane progressive

✓ *densité d’énergie volumique*

L’énergie E(t) comprise dans un volume $\mathscr{V}$ vaut : $E(t)=\frac{\rho_0}{2}\left[V^2(t)+\frac{p^2(t)}{\rho_0 c_0}\right]\mathscr{V}$

La densité d’énergie volumique vaut donc : $u(t)=\frac{E(t)}{\mathscr{V}}=\frac{\rho_0}{2}\left[V^2(t)+\frac{p^2(t)}{\rho_0 c_0}\right]\mathscr{V}$

Sa valeur moyenne vaut : $\langle u\rangle=\frac{1}{T}\frac{\rho_0}{2}\int_0^T\left[V^2(t)+\frac{p^2(t)}{\rho_0 c_0}\right]dt$

Comme pour l’onde sphérique divergente on a que : $p=\rho_0 c_0 V\cos\varphi$

on trouve : $\langle u\rangle=\frac{1}{4}\rho_0 V_m^2\left(1+\cos^2\varphi\right)=\frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho_0 c_0^2}\left[1+\frac{1}{2k^2r^2}\right]$

✓*Intensité et puissance rayonnée*

On peut généraliser les relations trouvées dans le cadre des ondes planes. Le vecteur de Poynting associé à l'onde sphérique est radial comme la vitesse acoustique :

$$\vec{\Pi} = -p\vec{V} = -pV\vec{1_r}$$

Si l'on évalue la puissance rayonnée à travers une surface élémentaire $\vec{dS} = -dS\vec{1_r}$ on obtient :

$$d\mathcal{P} = -\vec{\Pi}.\vec{dS} = pVdS$$

La valeur moyenne de puissance rayonnée par unité de surface qui définit l'intensité vaut donc toujours I =<pV>. On retrouve la même expression que pour l'intensité d'une onde plane et l'on prolonge cette notion aux ondes sphériques.

La puissance moyenne rayonnée à travers une sphère vaut alors :

$$\mathcal{P} = \int_{\text{sphère}} \left\langle -\vec{\Pi}.\vec{dS} \right\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \langle \Pi \rangle r^2 \sin\theta d\theta d\alpha = 4\pi r^2 I$$

Le calcul de l'intensité n'est simple que dans le cas des ondes harmoniques. Il faut cependant faire attention au maniement des complexes lorsqu'on calcule des grandeurs quadratiques. Il faut repasser aux parties réelles qui seules correspondent aux signaux physiques.

$$\mathrm{Re}[p] = \mathrm{Re}\left[-\rho_0 i\omega \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}\right] = \rho_0 \omega \frac{A}{r}\sin(\omega t - kr)$$

$$\mathrm{Re}[V] = \mathrm{Re}\left[\left(-\frac{1}{r} - jk\right)\frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}\right] = -\frac{A}{r^2}\cos(\omega t - kr) + k\frac{A}{r}\sin(\omega t - kr)$$

En remarquant que : $$\left\langle \cos^2(\omega t - kr) \right\rangle = \left\langle \sin^2(\omega t - kr) \right\rangle = \frac{1}{2}$$

et que : $$\left\langle \cos(\omega t - kr).\sin(\omega t - kr) \right\rangle = 0$$

on trouve : $$I = \left\langle pV \right\rangle = \frac{1}{2}\rho_0 \omega k \frac{A^2}{r^2} = \frac{p_m^2}{2\rho_0 c_0} = \frac{1}{2} p_m V_m \cos\varphi = \rho_0 c_0 V_m^2 \cos^2\varphi = \frac{p_{\text{eff}}^2}{\rho_0 c_0}$$

Où l'on a noté utilisé les notations p_m=$\rho_0\omega A/r$ de l'amplitude de la pression et V_m= de l'amplitude de la vitesse.

On retrouve une expression analogue à celle trouvée pour l'onde plane. Attention seule l'expression à partir de la pression est correcte, il n'y a pas d'expression simple à partir de l'amplitude de vitesse.

On remarque que le terme de vitesse qui est en phase avec la pression, le terme de champ lointain, est le seul contributif à l'intensité.

On peut aussi calculer l'intensité acoustique au départ de la relation :

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[pV^* \right] = \frac{1}{2} p_m V_m \cos\varphi$$

qui se réduit bien aux expressions précédentes.

On remarque que la puissance rayonnée à travers une sphère : $\mathcal{P} = 4\pi r^2 I = 2\pi\rho_0 \omega k A^2$
est indépendante du rayon de la sphère.

✓ *Relation entre l'intensité acoustique et la densité d'énergie moyenne*

Comme l'intensité vaut : $$I = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho_0 c_0}$$

et que la densité d'énergie volumique moyenne vaut : $$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho_0 c_0^2}\left[1 + \frac{1}{2k^2 r^2}\right]$$

on déduit la relation : $$I = \langle u \rangle c_0 \frac{2k^2 r^2}{1 + 2k^2 r^2}$$

Pour le champ proche, cette relation se réduit à : $$I = 2k^2 r^2 \langle u \rangle c_0$$

Pour le champ lointain, par contre, elle se ramène à la forme identique à celle obtenue pour l'onde plane progressive:

$$I = \langle u \rangle c_0$$

3 Propagation des ondes acoustiques dans un solide

3.1 Introduction

Dans un fluide, on a représenté l'onde par le potentiel de vitesse acoustique φ tel que la vitesse acoustique s'exprime par :

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi$$

La vitesse ne peut s'écrire ainsi que parce que l'on traite de phénomènes irrotationnels :

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$$

Une conséquence importante est que pour une onde plane se propageant dans la direction $\vec{n}$

de potentiel :

$$\varphi(\vec{r},t) = f\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right)$$

la vitesse est orientée selon $\vec{n}$:

$$\vec{V}(\vec{r},t) = \frac{\vec{n}}{c_0} f'\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_0}\right)$$

On parle alors d'ondes longitudinales (ou à polarisation longitudinale). Dans le cas d'ondes planes harmoniques, cela se traduit par le fait que k et V sont parallèles. En revanche, un milieu solide n'est pas irrotationnel. Il peut donc y apparaître des ondes qui ne seront pas polarisation longitudinale.

3.2 équations de propagation

Pour étudier la propagation des ondes dans un milieu solide, il nous faut connaître les propriétés mécaniques des milieux déformables : la propagation d'une onde génère une contrainte dynamique qui déforme localement le solide.

3.2.1 Hypothèses

De la même façon que pour les milieux fluides, il faut préciser à quel type de solide on s'intéresse et comment on représente son état.

On définit un *état de référence du solide* qui est celui *en absence d'onde*. On suppose que cet état est un *état d'équilibre*.

Pour définir un *état quelconque*, on utilise le *champ de déplacement* : $\vec{u}(\vec{r},t)$
qui permet d'évaluer le *déplacement par rapport à sa position initiale* du point situé en $\vec{r}$
(on supposera que les déplacement sont suffisamment faibles pour que l'on puisse identifier les représentations de Lagrange et d'Euler).

Plus précisément, les *positions d'équilibre $x^0(t)$* et *perturbées $x^i(t)$*sont reliées par :

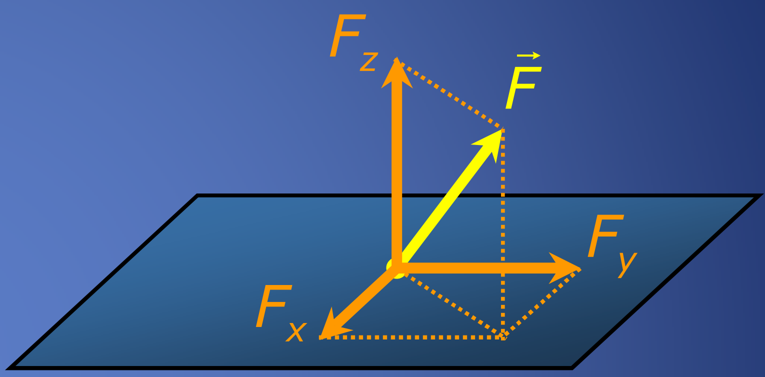
$$x^i(t) = x^i{}_0(t) + u^i(\vec{r},t)$$

Les efforts présents dans le solide sont représentés par le *tenseur des contraintes* : τ_{ij}

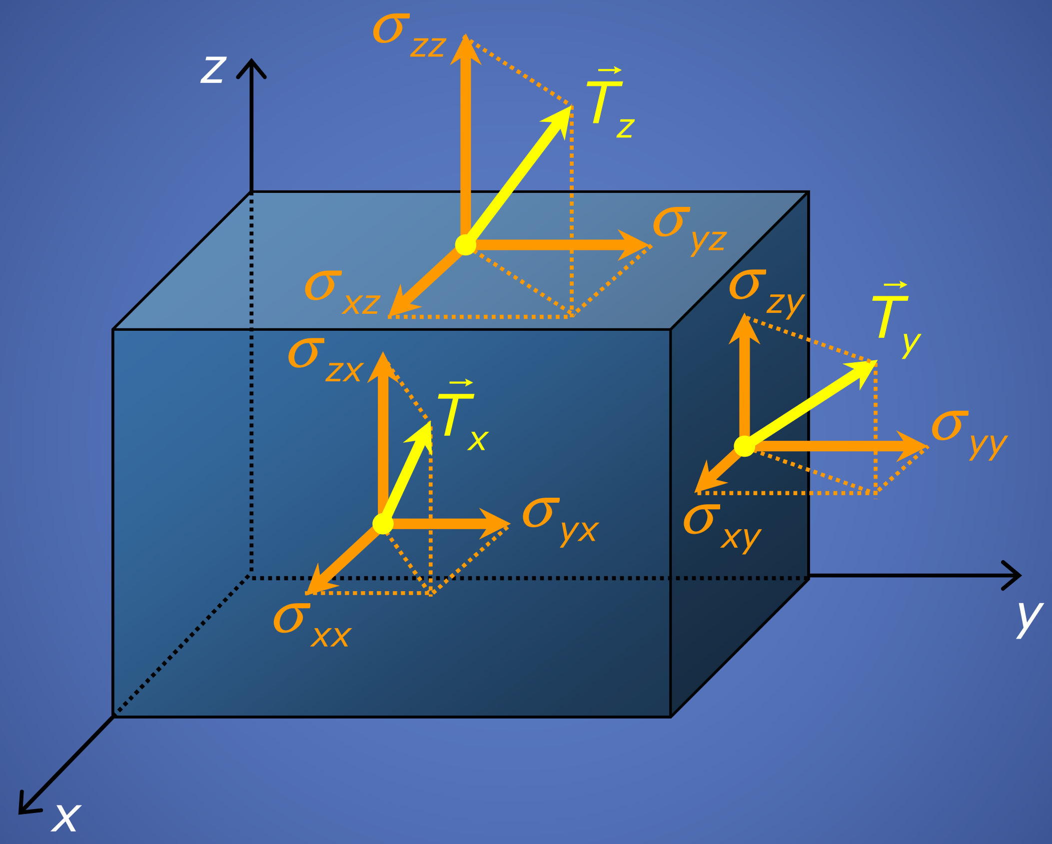
Voyons comment il se définit…

La *force* s'exerçant sur une *surface* peut toujours se décomposer en :

- deux composantes tangentielles (//) à la surface, ici F_x et F_y ;
- une composante normale (⊥) à la surface, ici F_z.



Considérons un *élément de volume solide*, de forme parallélépipédique rectangle :



force par unité de surface (pression)

$\vec{T}_x, \vec{T}_y, \vec{T}_z$ sont les *contraintes* s'exerçant sur les différentes faces (x,y,z)…

… et *chaque contraintes* est repérée par *3 composantes*.

On a donc *9 composantes*, notées σ_{ij}, qui peuvent se regrouper sous la forme d'un *tenseur* :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

tenseur des contraintes

Remarque :

Pour un élément σ_{ij}, le premier indice (i) repère la direction suivant laquelle s'exerce la contrainte ; le second indice (j) indique la direction normale à la surface sur laquelle s'exerce la contrainte.

Remarque :

Les élément σ_{ii} (sur la diagonale du tenseur) sont appelés *contraintes normales* ; les éléments σ_{ij} avec $j \neq i$ (hors-diagonale) sont appelés *contraintes tangentielles.*

Remarque :

Le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ est toujours *symétrique*, donc : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

L’application d’une contrainte provoque alors une *déformation* de l’élément de volume solide. Cette déformation peut également être décrite au moyen d’un *tenseur* :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

tenseur des déformations

Remarque :

Le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ est aussi toujours *symétrique*, donc : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

Comme on a défini U_x la vibration d’une particule fluide dans la direction de propagation, dans un solide il nous faut définir *3 vibrations* correspondant aux *3 directions de l’espace* : U_x, U_y et U_z

Par conséquent, au passage de l’onde, le solide peut se déformer dans les trois directions de l’espace.

Le tenseur de déformation s'obtient audépart du *champ de déplacement* u^i par les formules :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i\right)$$

Le tenseur des déformations s'explicite alors en fonction de ces vibrations :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Remarque :

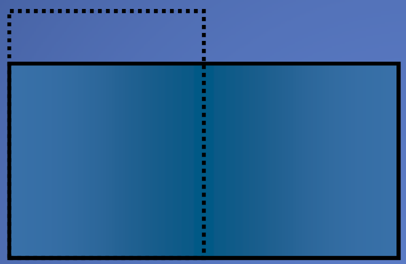
Les éléments diagonaux définissent les *déformations d'élongation*. La somme des 3 éléments diagonaux correspond alors à la *dilatation* θ :

$$\theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{dV}{V}$$

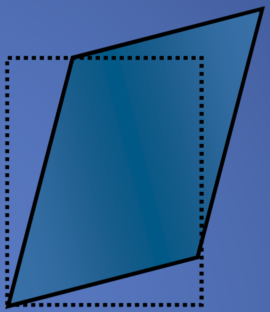
variation relative de volume

Remarque :

Les éléments en dehors de la diagonale définissent les déformations qui ne sont pas dans l'axe de l'élongation : ce sont les *déformations de cisaillement*.



élongation



cisaillement

La déformation de l'élément de volume solide est une *combinaison d'élongations et de cisaillements dans les 3 dimensions* de l'espace.

Le comportement du solide est complètement caractérisé par la loi de comportement qui est la relation entre : ε_{ij} et τ_{ij}

Les déformations résultent des contraintes appliquées. Il existe une relation entre les deux :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{\varepsilon}}$$ *loi de Hooke*

où $\overline{\overline{C}}$ est le *tenseur des constantes élastiques* (caractéristiques intrinsèques du matériau).

Remarque :

Le *rang d'un tenseur* correspond au *nombre d'indices* nécessaires pour *identifier une de ses composantes*.

σ_{ij} ⇨ tenseur de rang 2

ε_{ij} ⇨ tenseur de rang 2

$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$ ⇨ $\overline{\overline{C}}$ tenseur de rang 4

Le *nombre d'éléments* composant un tenseur de rang *n* est donné par : 3^n

Par conséquent, on vérifie bien que σ_{ij} et ε_{ij} contiennent $3^2 = 9$ composantes.

Et on trouve que c_{ijkl} contient $3^4 = 81$ composantes !!!

Par exemple :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = {} & c_{xxxx}\varepsilon_{xx} + c_{xxxy}\varepsilon_{xy} + c_{xxxz}\varepsilon_{xz} \\ & + c_{xxyx}\varepsilon_{yx} + c_{xxyy}\varepsilon_{yy} + c_{xxyz}\varepsilon_{yz} \\ & + c_{xxzx}\varepsilon_{zx} + c_{xxzy}\varepsilon_{zy} + c_{xxzz}\varepsilon_{zz}\end{aligned}$$

Mais : les propriétés de symétrie du matériau, ainsi que la symétrie des tenseurs vont permettre de diminuer considérablement le nombre de composantes indépendantes à manipuler.

Astuce :

Afin de simplifier l'écriture de ces tenseurs et des relations qui les lient, on utilise l'astuce suivante :

au tenseur symétrique $\overline{\overline{\sigma}}$ de rang 2,
on associe un vecteur à 6 composantes :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}$$

σ_{ij}

tenseur de rang 1

σ_α

On peut procéder de même pour : $\overline{\overline{\varepsilon}}$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

ε_{ij}

tenseur de rang 1

ε_β

En notation contractée, la loi de *Hooke* s'exprime alors comme :

$$\sigma_\alpha = c_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta$$ où α,β = 1,2,3,4,5 ou 6.

$\overline{\overline{C}}$ est donc réduit à un *tenseur de rang 2* correspondant à une *matrice 6×6* :

$$\sigma_\alpha = c_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

On a ainsi par exemple : $\sigma_4 = c_{14}\varepsilon_1 + c_{24}\varepsilon_2 + c_{34}\varepsilon_3 + c_{44}\varepsilon_4 + c_{45}\varepsilon_5 + c_{46}\varepsilon_6$

Remarque :

Comme le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ est symétrique, $c_{\alpha\beta}$ ne compte que 21 composantes indépendantes.

Voyons comment il est possible de réduire encore le nombre de composantes indépendantes en tenant compte de la *symétrie* du milieu solide :

Si le milieu présente une *symétrie cubique*, alors il ne reste plus que *3 composantes indépendantes* :

$$\overline{\overline{c}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Si, en outre, le milieu est parfaitement *isotrope*, alors on doit vérifier :

$$c_{44} = \tfrac{1}{2}\left(c_{11} - c_{12}\right)$$

➔ il ne reste plus que *2 composantes indépendantes* :

les coefficients de Lamé

$$\begin{cases} \lambda = c_{12} \\ \mu = c_{44} \end{cases} \qquad \Rightarrow c_{11} = 2\mu + \lambda$$

En résumé, on choisit un solide :

✓*homogène* : ses propriétés sont identiques en tout point ;
✓*isotrope* : les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace
✓*linéaire* : la réponse du solide est proportionnelle à la sollicitation à laquelle il est soumis, ce qui revient à choisir une loi de comportement linéaire :

$$\tau_{ij} = \lambda\left(\vec{\nabla}.\vec{u}\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

où *λ et μ sont les coefficients de Lamé*.

On suppose que, comme dans le cas des fluides, il n'y a pas d'autres efforts exercés que ceux en rapport avec les ondes acoustiques.

Toutes les propriétés élastiques du solides se résument donc aux *deux coefficients de Lamé* :

μ $\longleftarrow$ *module de cisaillement* (viscosité pour un fluide)

λ $\longleftarrow$ *module d'incompressibilité* (1/χ pour un fluide)

3.2.2 équation de la quantité de mouvement

On repart de l'équation de la *conservation de la quantité de mouvement* :

$$\rho \frac{dV^j}{dt} = \nabla_i \tau^{ij} + f^j$$

que l'on va simplifier en supposant la *densité volumique de force f^j nulle* et en explicitant :

$$V^j = \frac{du^j}{dt} = \frac{\partial u^j}{\partial t} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial u^j}{\partial t} + V^i \nabla_i u^j \approx \frac{\partial u^j}{\partial t}$$

où l'on n'a gardé que les *termes d'ordre 1 en la perturbation*.

De la même manière, on obtient :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \approx \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

L'équation de la conservation de mouvement devient donc, en regroupant et en explicitant :

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\right]$$

$$= \mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\lambda\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)$$

c'est-à-dire, sous forme vectorielle :

$$\rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{u}\right)$$

En utilisant la relation vectorielle : $\Delta\vec{u} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{u}\right)-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\overrightarrow{u)}$

on peut finalement écrire : $\rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\Delta\vec{u}-(\lambda+\mu)\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})$

3.2.3 équations de propagation

On montre qu'un champ vectoriel $\vec{u}(\vec{r},t)$ peut se décomposer sous la forme :

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \overrightarrow{u_L}(\vec{r},t) + \overrightarrow{u_T}(\vec{r},t)$$

où : $\overrightarrow{u_L}(\vec{r},t)$ est un *champ irrotationnel* vérifiant ($\vec{\nabla} \times \overrightarrow{u_L} = \vec{0}$)

$\overrightarrow{u_T}(\vec{r},t)$ est un *champ solénoïdal* vérifiant ($\vec{\nabla} . \overrightarrow{u_T} = 0$)

On peut alors écrire les équations vérifiées par ces deux composantes du champ de déplacement :

$$\rho \frac{\partial^2 \overrightarrow{u_L}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\Delta \overrightarrow{u_L}$$

qui se met sous la forme : $\boxed{\Delta \overrightarrow{u_L} - \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{u_L}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ avec : $\boxed{c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}$

De la même manière : $\rho \frac{\partial^2 \overrightarrow{u_T}}{\partial t^2} = \mu \Delta \overrightarrow{u_T}$

qui se met sous la forme : $\boxed{\Delta \overrightarrow{u_T} - \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{u_T}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ avec : $\boxed{c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}}$

On constate que ces *équations de propagation dans les solides* sont *similaires à celle obtenue pour la propagation dans les fluides*.

3.2.4 Vitesses de propagation des ondes acoustiques dans un solide

Il y a *deux équations* qui correspondent à *deux types d'onde* qui se propagent à des *vitesses différentes* que l'on désigne sous le nom de *célérités longitudinale* (c_L) et *célérité transversale* (c_T). On note de plus que :

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = \frac{c_L}{\sqrt{2}}$$

donc : $\boxed{c_T < \frac{c_L}{\sqrt{2}}}$

La célérité transversale est plus petite la célérité longitudinale.

Le tableau suivant donne quelques ordres de grandeur :

	béton	verre	acier
masse volumique (kg/m^3)	2600	2300	7800
célérité longitudinale (m/s)	3100	5200	5600
célérité transversale (m/s)	2100	3300	3400

Remarque :

On peut facilement retrouver le résultat obtenu pour la vitesse de propagation dans un fluide :

En effet, le module de cisaillement s'apparente à la viscosité, donc pour un fluide parfait : $\mu \approx 0$

$$\Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \approx 0 \quad \text{et} \quad v_L = \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho\chi}} = c$$

↪ on retrouve le fait que *dans un fluide seules des ondes longitudinales peuvent se propager à la vitesse* :

$$c = 1/\sqrt{\rho\chi}$$

3.2.5 Ondes longitudinales

On peut reprendre le raisonnement suivi pour les ondes dans les fluides. Comme $\vec{\nabla}\times\overrightarrow{u_L}=\vec{0}$ il existe il existe un potentiel scalaire $\varphi\left(\vec{r},t\right)$ de déplacement tel que : $\overrightarrow{u_L}=\vec{\nabla}\varphi$

Par conséquent, $\Delta u_L{}^i=\partial_j\partial^j u_L{}^i=\partial_j\partial^j\partial^i\varphi=\partial^i\partial^j\partial_j\varphi=\left(\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\overrightarrow{u_L}\right)\right)^i$

En reportant dans l'équation de propagation, on trouve : $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\varphi\right)\right)-\frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\vec{\nabla}\varphi}{\partial t^2}=0$

c'est-à-dire encore : $$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\varphi\right)-\frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=\vec{\nabla}\left(\Delta\varphi-\frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0$$

En intégrant, on trouve : $$\Delta\varphi-\frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\text{cste}$$

et la constante doit être nulle pour que cette relation soit vérifiée en l'absence d'onde.

Donc : $$\Delta\varphi-\frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

Cette équation étant identique à celle des fluides, on trouve des solutions de type onde plane de la forme : $$\varphi(\vec{r},t)=f\left(t-\frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_L}\right)$$

Attention, il s'agit d'un potentiel de déplacement et non d'un potentiel de vitesse. On peut en déduire le déplacement et le tenseur des contraintes mais dans la plupart des cas, on s'intéresse plus particulièrement aux ondes harmoniques.

3.2.6 Ondes planes longitudinales harmoniques

Dans ce cas : $\varphi(\vec{r},t) = Ae^{i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)}$ avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c_L}\vec{n}$

On en déduit le déplacement : $\overrightarrow{u_L} = \vec{\nabla}\varphi = -i\vec{k}\varphi$

Le vecteur déplacement est effectivement parallèle au vecteur d'onde (d'où le nom d'ondes longitudinales) et l'on vérifie bien :

$$\vec{\nabla}\times\overrightarrow{u_L} = -i\vec{k}\times\overrightarrow{u_L} = -\vec{k}\times\vec{k}\varphi = \vec{0}$$

On en déduit le tenseur des contraintes associé à l'onde longitudinale :

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} = -i\mu\left(k_j u_i + k_i u_j\right) - i\lambda\sum_{k=1}^{3}k_k u_k\delta_{ij}$$
$$= -\left(2\mu k_i k_j + \lambda k^2\delta_{ij}\right)\varphi = -k^2\left(2\mu n_i n_j + \lambda\delta_{ij}\right)\varphi$$

c'est-à-dire, en notation tensorielle :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -k^2\left(2\mu\vec{n}\otimes\vec{n} + \lambda\overline{\overline{1}}\right)\varphi = -iku\left(2\mu\vec{n}\otimes\vec{n} + \lambda\overline{\overline{1}}\right)$$

Ce tenseur des contraintes comporte deux termes :

✓ une *partie sphérique* (ou isotrope) $\overline{\overline{\sigma}} = -k^2\lambda\overline{\overline{1}}\varphi$ qui est l'*équivalent d'une* « *pression* » (il n'y a pas de notion de pression dans un solide!) ;

✓ un *terme* traduisant une *traction compression* de direction $\vec{n}$: $\overline{\overline{\sigma}} = -2\mu k^2\vec{n}\otimes\vec{n}\varphi$

3.2.7 Ondes transversales

On s'intéresse au deuxième type d'ondes qui vérifient $\vec{\nabla}.\overrightarrow{u_T} = 0$. On montre que ce genre de champ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{\psi}$ tel que :

$$\overrightarrow{u_T} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}.\vec{\psi} = 0$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\Delta\overrightarrow{u_T} &= -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \overrightarrow{u_T}\right) \quad \text{comme } \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}.\overrightarrow{u_T}\right) = \vec{\nabla}\left(\nabla.\overrightarrow{u_T}\right) - \Delta\overrightarrow{u_T} \\
&= -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\psi}\right)\right) \\
&= -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\left(\nabla.\vec{\psi}\right) - \Delta\vec{\psi}\right) \\
&= \vec{\nabla} \times \Delta\vec{\psi}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de propagation, on trouve :

$$\vec{\nabla} \times \Delta\vec{\psi} - \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\left(\vec{\nabla} \times \vec{\psi}\right)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou encore } \vec{\nabla} \times \left(\Delta\vec{\psi} - \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2}\right) = \vec{0}$$

Par intégration, on trouve : $\boxed{\Delta\vec{\psi} - \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

On obtient à nouveau une équation de propagation de même type dont les solutions en onde plane seront de la forme :

$$\vec{\psi}(\vec{r},t) = \vec{f}\left(t - \frac{\vec{n}.\vec{r}}{c_T}\right)$$

3.2.8 Ondes planes transverses harmoniques

Elles sont de la forme : $\vec{\psi}(\vec{r},t) = \vec{A}e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$ avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c_T}\vec{n}$

Si on impose : $\vec{\nabla}.\vec{\psi} = -i\vec{k}.\vec{\psi} = 0$

on déduit que : $\vec{\psi} \perp \vec{n}$

On en déduit le déplacement : $\overrightarrow{u_T} = -i\vec{k} \times \vec{\psi}$ donc $\overrightarrow{u_T} \perp \vec{n}$

le déplacement des particules est orthogonal à la direction de propagation de l'onde d'où le nom d'onde transversale.

On vérifie bien évidemment : $\vec{\nabla}.\overrightarrow{u_T} = -i\vec{k}.\overrightarrow{u_T} = -\vec{k}.\left(\vec{k} \times \vec{\psi}\right) = 0$

On calcule le tenseur des contraintes associé :

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\vec{\nabla}.\overrightarrow{u_T}\delta_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = -i\mu\left(k_j u_i + k_i u_j\right)$$

c'est-à-dire en notation tensorielle :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -i\mu k\left(\overrightarrow{u_T} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \overrightarrow{u_T}\right) = -\mu k^2\left(\vec{t} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}\right) = -i\mu k u\left(\vec{t} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{t}\right)$$

où l'on a introduit un vecteur transverse unitaire tel que : $\overrightarrow{u_T} = -ik\psi\vec{t}$

On constate que ce tenseur correspond à des *efforts de cisaillement pur*.

3.2.9 Aspects énergétiques

On reprend la démarche adoptée dans le cas des fluides. On multiplie scalairement l'équation linéarisée de conservation de la quantité de mouvement par $\vec{V}$:

$$\rho\vec{V}.\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=\vec{V}.\left(\vec{\nabla}.\overline{\overline{\sigma}}\right)=\vec{\nabla}.\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right)-\overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{\nabla}}\vec{V}$$

$$=\vec{\nabla}.\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right)-\overline{\overline{\sigma}}:\frac{\partial\left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{u}\right)}{\partial t}=\vec{\nabla}.\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right)-\overline{\overline{\sigma}}:\frac{\partial\overline{\overline{\varepsilon}}}{\partial t}$$

Soit :

$$\rho\vec{V}.\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\overline{\overline{\sigma}}:\frac{\partial\overline{\overline{\varepsilon}}}{\partial t}=\vec{\nabla}.\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right)$$

On retrouve la *même forme de conservation de l'énergie que dans le cas fluide* :

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\left\|\vec{V}\right\|^2+\overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{\varepsilon}}\right)=\vec{\nabla}.\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right)=\vec{\nabla}.\vec{\Pi}$$

où l'on a introduit *W*, la *densité volumique d'énergie* : *$W = W_{cin} + W_{pot}$*, et le *vecteur de Poynting* $\vec{\Pi}=\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}$

Le même raisonnement permet de calculer le *flux de puissance à travers une surface* :

$$d\mathcal{P}=\vec{\Pi}.\vec{dS}$$

Attention, à cause du choix des orientations des vecteurs surface, le flux est évalué dans la direction opposée à dS.

Pour une onde plane, on prolonge la définition de l'*intensité* vue pour le cas fluide par :

$$I = \left\langle -\vec{\Pi}.\vec{n} \right\rangle = -\left\langle \left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V} \right).\vec{n} \right\rangle = -\left\langle \left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n} \right).\vec{V} \right\rangle$$

Pour une onde harmonique longitudinale : $\vec{V} = i\omega\vec{u}$

donc : $$\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n} = -iku\left(2\mu\vec{n}\otimes\vec{n} + \lambda\overline{\overline{1}}\right).\vec{n} = -i\frac{\omega}{c_L}u\left(2\mu\vec{n} + \lambda\vec{n}\right) = \frac{1}{c_L}i\omega u\vec{n}\left(2\mu + \lambda\right) = -\rho c_L\vec{V}$$

Comme $\vec{V}$ et $\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}$ sont en phase, on trouve : $I = \frac{1}{2}Z_L V_0^2$

avec $Z_L=\rho c_L$ l'*impédance longitudinale* et V_0 l'*amplitude de la vitesse*.

On retrouve une *expression analogue à celle trouvée dans le cas fluide mais uniquement en terme de vitesse* car il n'est pas question de parler de pression dans le solide.

On peut faire un calcul analogue pour les ondes transversales harmoniques :

$$\vec{V} = i\omega\vec{u}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n} = -i\mu ku\left(\vec{t}\otimes\vec{n} + \vec{n}\otimes\vec{t}\right).\vec{n} = -i\frac{\omega}{c_T}\rho c_T^2 u\vec{t} = -i\omega\rho c_T u\vec{t} = -iZ_T\vec{V}$$

$$I = \frac{1}{2}Z_T V_0^2$$

Bien que le déplacement des particules soit orthogonal à la direction de propagation, l'énergie se propage dans le sens de la propagation.